2024 年度 豊島岡女子学園中学校

第 3 回 算数 解答解説

■ 解答一覧

大問	小問	答え
1	(1)	2
1	(2)	24 人
1	(3)	22
1	(4)	$\frac{7}{9}$
2	(1)	500 円
2	(2)	12 分
2	(3)	400 m
2	(4)	165 個
3	(1)	8 cm
3	(2)	3 cm
4	(1)	$41\frac{7}{13}$ 分後
4	(2)	13 回
5	(1)	21 個
5	(2)	4
5	(3)	あ:2 い:3 う:6
6	(1)	33.12 cm^2
6	(2)	26.84 cm^2
6	(3)	45.68 cm^2

1 計算・小問集合

問題

[1] 次の各問いに答えなさい。

(1) $\left(\frac{5}{21}\div\frac{1}{30}-4\right)\times\frac{14}{33}+\frac{2}{3}$ を計算しなさい。

(1) 分数の四則計算

答え **2**

1. かっこの中のわり算から始めます。わり算は「逆数(分母と分子を入れかえた数)をかける」のでしたね。

$$\frac{5}{21}\div\frac{1}{30}=\frac{5}{21}\times 30=\frac{150}{21}=\frac{50}{7}$$

2. 次に、かっこの中のひき算です。4 を分母 7 の分数に直すと $\frac{28}{7}$ なので、

$$\frac{50}{7}-4=\frac{50}{7}-\frac{28}{7}=\frac{22}{7}$$

3. かけ算をします。22 と 33 は 11 で、14 と 7 は 7 で約分できます。

$$\frac{22}{7}\times\frac{14}{33}=\frac{2\times 2}{1\times 3}=\frac{4}{3}$$

4. 最後にたし算です。$\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$ となります。

ポイント

計算の順番は「かっこの中 → かけ算・わり算 → たし算・ひき算」。かけ算に入る前に約分できる数を探すと、数が小さくなってミスが減ります。

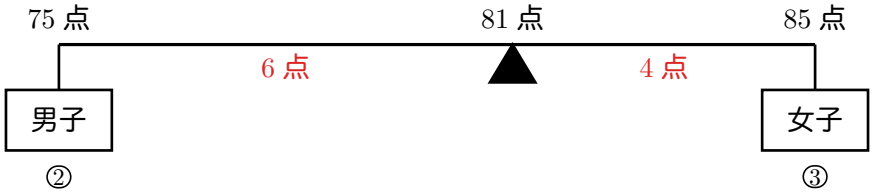
問題

(2) 40 人の生徒に 100 点満点のテストを行ったところ，男子の平均点は 75 点，女子の平均点は 85 点，40 人全体の平均点は 81 点でした。このとき，女子の人数は何人ですか。

(2) 平均 → てんびん図

答え **24 人**

1. 男子の平均、女子の平均、全体の平均の 3 つが出てきたら、てんびん図(または面積図)で考えます。全体の平均 81 点は、75 点と 85 点の間のどこかでつり合っているからです。



てんびん図:うでの長さの比と、おもり(人数)の比は逆になる

2. 支点(全体の平均)からのきょりは、男子側が $81-75=6$ 点、女子側が $85-81=4$ 点です。うでの長さの比は $6:4=3:2$ です。
3. てんびんがつり合うとき、おもりの重さ(人数)の比は、うでの長さの逆の比になります。だから 男子 : 女子 $=2:3$ です。
4. 全体は 40 人なので、女子は

$$40\times\frac{3}{2+3}=24\ (\text{人})$$

たしかめ:男子 16 人で $75\times16+85\times24=1200+2040=3240$、$3240\div40=81$ 点。合っています。

ポイント

「A の平均・B の平均・全体の平均」の 3 つを見たら、てんびん図。全体の平均との差の比を出して、逆の比にすれば人数の比です。

問題

(3) 連続する 3 つの整数の積を 6 で割ると 2024 になりました。3 つの整数の中で最も小さい整数はいくつですか。

(3) 連続する整数の積 → 素因数分解

答え **22**

1. 「6 で割ると 2024」なので、3 つの整数の積は 2024×6 です。ここですぐにかけ算をせず、素因数分解(素数のかけ算に分けること)をします。連続する 3 つの数に組み直したいからです。
2. 2024 を小さい素数で順に割っていくと、

$$2024=2\times2\times2\times11\times23,\quad 6=2\times3$$

なので、積は $2\times2\times2\times2\times3\times11\times23$ です。
3. 23 は素数なので、3 つの整数のどれかは 23 の倍数です。そこで 23 のとなりの数 22 や 24 が作れないか考えます。

$$(2\times11)\times23\times(2\times2\times2\times3)=22\times23\times24$$

ぴったり連続する 3 つの整数になりました。
4. いちばん小さい整数は 22 です。たしかめ:$22\times23\times24=12144$、$12144\div6=2024$。

ポイント

「連続する整数の積」は素因数分解して、いちばん大きい素数(今回は 23)を手がかりに、そのとなりの数を作ります。$2024=8\times11\times23$ は 2024 年度入試の定番なので覚えておくと速いです。

問題

(4) a は b より大きい数とします。2 つの数 a と b について，記号「◎」を次のように約束します。

$$a \text{◎} b = \frac{a-b}{a+b}$$

$\square \text{◎} \left(\frac{5}{6} \text{◎} \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{4}$ となるとき，$\square$ にあてはまる数を答えなさい。

ただし，かっこの中を先に計算するものとします。

(4) 約束記号 → 和と差の比

答え $\boxed{\frac{7}{9}}$

1 約束は「(2 つの数の差)÷(2 つの数の和)」です。まず、かっこの中 $\frac{5}{6} \text{◎} \frac{2}{3}$ を計算します。$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ なので、

> 差 $= \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$、 和 $= \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6}$
>
> $$\frac{5}{6} \text{◎} \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \div \frac{9}{6} = \frac{1}{9}$$

2 すると式は「$\square$ ◎ $\frac{1}{9} = \frac{3}{4}$」になります。これは「$\square$ と $\frac{1}{9}$ の差」:「$\square$ と $\frac{1}{9}$ の和」$= 3 : 4$ という意味です。

3 差を ③、和を ④ とします。和と差のちがいは、小さいほうの数 $\frac{1}{9}$ の 2 つ分です(和差算の考え方)。

> ④ − ③ = ① $= \frac{1}{9} \times 2 = \frac{2}{9}$

4 $\square$ は「差 $+\frac{1}{9}$」なので、

> $$\square = \frac{2}{9} \times 3 + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

たしかめ:差 $\frac{7}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$、和 $\frac{8}{9}$、$\frac{6}{9} \div \frac{8}{9} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$。合っています。

ポイント

約束記号は、①かっこの中から約束どおりに計算、②□が残ったら約束の意味を言葉にもどす。「差:和」が分かったら、和 − 差 = 小さい数の 2 倍 を使います。

2　小問集合(売買損益・ニュートン算・速さ・規則性)

問題

2　次の各問いに答えなさい。

(1) ある商品を 600 個仕入れて，10 %の利益を見込んで定価をつけました。450 個が売れたところで，残りを定価の 2 割引きにしたところすべて売り切れ，全部で 13500 円の利益がでました。この商品の 1 個あたりの仕入れ値はいくらですか。

(1)　売買損益 → 仕入れ値を 100 とおく

答え　**500 円**

1. 仕入れ値が分からないので、1 個の仕入れ値を $\textcircled{100}$ とおきます。割合の問題は、もとにする量を 100 にすると計算しやすいからです。
2. 定価は 10% の利益を見こむので $\textcircled{110}$。定価で売ると 1 個あたり $\textcircled{10}$ の利益です。
3. 定価の 2 割引きは $\textcircled{110} \times 0.8 = \textcircled{88}$。仕入れ値 $\textcircled{100}$ より安いので、1 個あたり $\textcircled{12}$ の損になります。
4. 定価で 450 個、2 割引きで $600 - 450 = 150$ 個売れました。全体の利益は
   $$\textcircled{10} \times 450 - \textcircled{12} \times 150 = \textcircled{4500} - \textcircled{1800} = \textcircled{2700}$$
5. これが 13500 円なので、$\textcircled{1} = 13500 \div 2700 = 5$ 円。仕入れ値は $\textcircled{100} = 500$ 円です。 たしかめ:定価 550 円、割引後 440 円。$50 \times 450 - 60 \times 150 = 22500 - 9000 = 13500$ 円。

ポイント

売買損益は「仕入れ値を $\textcircled{100}$」とおいて、1 個あたりの利益・損を出し、個数をかけて合計します。割引後の値段が仕入れ値より安くなって「損」になる場合に注意。

問題

(2) ある井戸に水が 96 L たまっていて，一定の割合で水がわき出ています。この井戸を空にするのに，ポンプを 4 つ使うと 24 分かかり，ポンプを 5 つ使うと 16 分かかります。ポンプを 6 つ使うと，井戸は何分で空になりますか。ただし，ポンプ 1 つで 1 分間にくみ出せる水の量はすべて同じであるものとし，井戸から水があふれることはないものとします。

(2)　ニュートン算

答え　**12 分**

1. 水がわき出しながらくみ出すので、ニュートン算です。ポンプ 1 つが 1 分間にくみ出す量を $\textcircled{1}$ とおきます。
2. くみ出した水の量を 2 通りくらべます。
   ポンプ 4 つで 24 分:$\textcircled{4} \times 24 = \textcircled{96}$ (はじめの水 + 24 分間にわいた水)
   ポンプ 5 つで 16 分:$\textcircled{5} \times 16 = \textcircled{80}$ (はじめの水 + 16 分間にわいた水)

3 はじめの水はどちらも同じなので、ちがいの ㊾ − ㊽ = ⑯ は、$24-16=8$ 分間にわいた水です。だから 1 分間にわく水は ⑯ ÷ 8 = ② です。

4 はじめの水は ㊾ − ② × 24 = ㊽ です。(これが 96 L なので ① は 2 L ですが、時間を求めるだけなら使わなくても解けます。)

5 ポンプ 6 つのとき、1 分間に ⑥ くみ出して ② わくので、水は 1 分に ④ ずつへります。

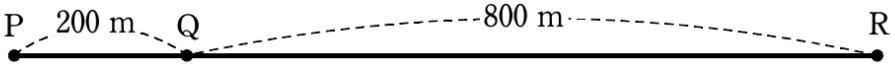
> ㊽ ÷ ④ = 12 (分)

ポイント

ニュートン算は「くみ出した量 = はじめの量 + わき出た量」。2 通りの合計をくらべて、時間の差の分だけわいた量 → 1 分にわく量 → はじめの量、の順に求めます。

問題

(3) 下の図のような 3 つの地点 P，Q，R の間を，A さんと B さんが，Q を同時に出発し，それぞれ一定の速さで進みます。A さんは Q を出発すると P へ向かって進み，P で 3 分間停まると，それまでの 2 倍の速さで R へ向かって進みました。B さんは Q を出発すると R へ向かって進み，出発してから 24 分後に A さんと同時に R に着きました。A さんが P から Q に戻ってきたとき，B さんは R まであと何 m の位置にいましたか。



(3) 速さと比

答え **400 m**

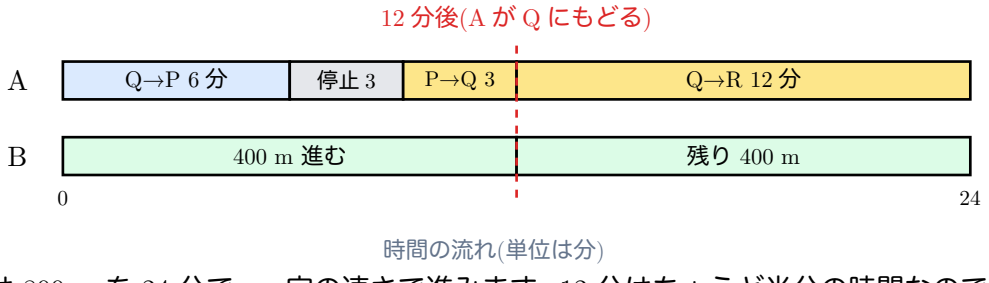
1 A さんの動きを整理します。Q→P は 200 m、P→R は $200+800=1000$ m。速さは Q→P を ① とすると、P→R は 2 倍の ② です。

2 かかる時間の比は「道のり ÷ 速さ」でくらべます。

> (Q→P の時間):(P→R の時間)$= 200\div 1 : 1000\div 2 = 200 : 500 = 2 : 5$

3 全部で 24 分、そのうち 3 分は止まっていたので、歩いた時間は $24-3=21$ 分。これを 2 : 5 に分けると、Q→P が 6 分、P→R が 15 分です。

4 P→R の 1000 m に 15 分かかるので、そのうち P→Q の 200 m($\frac{1}{5}$)には $15\div 5=3$ 分かかります。A さんが Q にもどるのは、出発から $6+3+3=12$ 分後です。



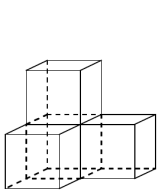
5 B さんは 800 m を 24 分で、一定の速さで進みます。12 分はちょうど半分の時間なので、進んだ道のりも半分の 400 m。R まではあと $800-400=400$ m です。

ポイント

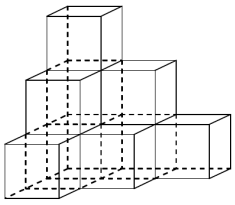
速さが途中で変わるときは、「道のり ÷ 速さ」で時間の比を出して、実際の時間を比で分けます。止まっていた時間を先に引くのを忘れずに。

問題

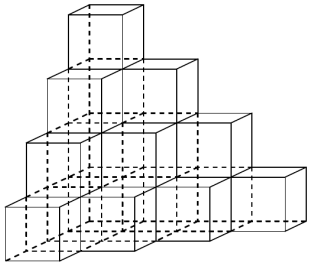
(4) 下の図のように，同じ大きさの立方体を積み上げます。2 段積み上げると＜図 1 ＞のようになり，3 段積み上げると＜図 2 ＞のようになり，4 段積み上げると＜図 3 ＞のようになります。同じように 9 段積み上げるためには，立方体は何個必要ですか。



＜図 1 ＞



＜図 2 ＞



＜図 3 ＞

(4) 積み上げた立方体 → 段ごとに数える

答え **165 個**

1. 立体の個数は、上から 1 段ずつ(真上から見た形で)数えるのが基本です。図 1〜図 3 で段ごとの個数を調べます。

   図 1(2 段):上から 1 個、3 個
   図 2(3 段):上から 1 個、3 個、6 個
   図 3(4 段):上から 1 個、3 個、6 個、10 個

2. 1, 3, 6, 10 は、ふえ方が $+2, +3, +4$ となっています。つまり上から □ 段目は $1+2+3+\cdots+\square$ 個(三角数)です。真上から見ると、階段の形に 1 列、2 列、…とならんでいるからです。

3. 9 段目まで書き出します。

上から	1 段	2 段	3 段	4 段	5 段	6 段	7 段	8 段	9 段
個数	1	3	6	10	15	21	28	36	45

4. 全部たします。

$$(1+3+6+10)+(15+21)+(28+36)+45=20+36+64+45=165\ (\text{個})$$

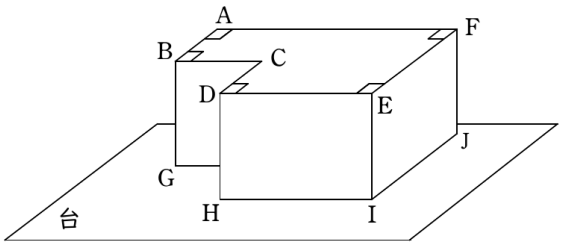
ポイント

積み木の個数は「段ごとに分けて数え、きまりを見つける」。1, 3, 6, 10, 15, … は三角数(1 からの整数の和)です。図で分かる段数で必ずきまりをたしかめてから先に進みましょう。

3 立体図形(水の体積・容器をかたむける)

問題

3 ＜図 1＞のように，AB＝ 3 cm，BC＝ 4 cm，CD＝ 3 cm，BG＝ 5 cm で，側面がすべて長方形でできている容器が水平な台の上に置いてあります。この容器に水を 60 cm^3 入れ，＜図 1＞のように置いたとき，水平な台から水面までの高さが 1 cm でした。このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，容器の厚みは考えないものとします。



＜図1＞

(1) DE の長さは何 cm ですか。

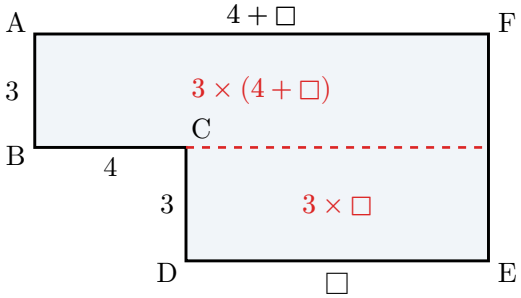
(1) 底面積 ＝ 体積 ÷ 高さ

答え **8 cm**

1 側面がすべて長方形なので、この容器は底面が図のような「かぎ形」の柱です。水の体積は「底面積 × 水の高さ」なので、

> 底面積 $= 60 \div 1 = 60$ (cm^2)

2 底面を真上から見た図をかきます。DE の長さを □ cm とします。上の横長の長方形と、下の長方形の 2 つに分けて考えます。



真上から見た図(単位は cm)

3 上の長方形はたて 3 cm、横 $(4 + □)$ cm。下の長方形はたて 3 cm、横 □ cm です。

> $3 \times (4 + □) + 3 \times □ = 60$
> $12 + 6 \times □ = 60 \rightarrow 6 \times □ = 48 \rightarrow □ = 8$

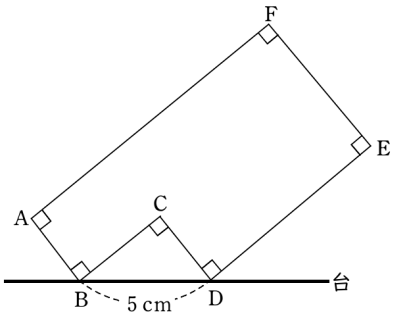
DE は 8 cm です。(AF は $4 + 8 = 12$ cm、EF は $3 + 3 = 6$ cm になります。)

ポイント

柱の形の容器では「水の体積 ＝ 底面積 × 高さ」。体積と高さが分かれば底面積が出ます。かぎ形(L 字形)の面積は長方形 2 つに分けましょう。

問題

(2) この容器にさらに水を入れ，ふたをしてこぼれないようにしました。この容器を辺 BG，辺 DH が水平な台につくように置いて真横から見ると，下の＜図 2＞のようになりました。このとき，ちょうど水面が点 E を通りました。この容器を＜図 1＞のように置きなおしたとき，水平な台から水面までの高さは何 cm になりますか。



＜図2＞

(2) かたむけた容器 → 水面は台と平行

答え **3 cm**

1. 図 2 は容器を真横から見た図で、(1)で調べた底面の形(面積 60 cm²)がそのまま見えています。奥行きは BG = 5 cm です。この向きでは「図 2 の水の部分の面積 × 5」が水の体積になります。
2. 水面は必ず水平、つまり台(直線 BD)と平行です。E を通って BD に平行な直線を引き、AF と交わる点を P とします。直線 PE が水面で、その下が水、上の三角形 PFE が空気です。

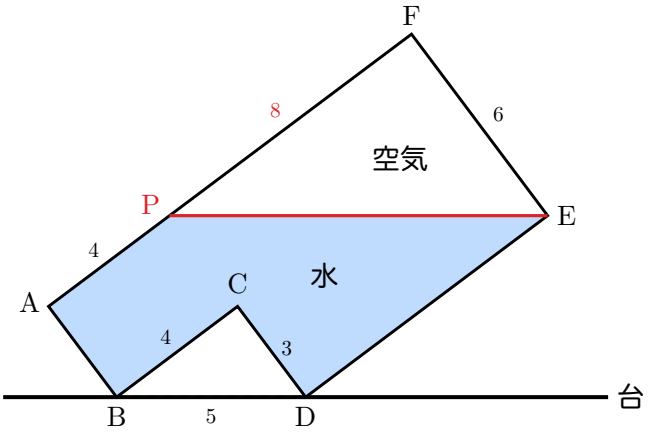


図 2 に水面 PE をかき入れた図(青い部分が水)

3. 三角形 PFE と三角形 BCD をくらべます。PF と BC、FE と CD、PE と BD はそれぞれ平行なので、2 つの三角形は同じ形(相似)です。三角形 BCD は BC = 4、CD = 3、BD = 5 の直角三角形です。
4. FE は CD に対応していて、FE = 6 cm は CD = 3 cm の 2 倍です。だから PF も BC の 2 倍で 4 × 2 = 8 cm です。

> 空気の部分(三角形 PFE)= 8 × 6 ÷ 2 = 24 (cm²)

5. 水の部分の面積は、全体からひいて 60 − 24 = 36 cm²。水の体積は

$$36 \times 5 = 180 \ (\text{cm}^3)$$

6. 図 1 の向きにもどすと、底面積は 60 cm² なので、水の高さは

$$180 \div 60 = 3 \ (\text{cm})$$

容器の高さ 5 cm より低いので、あふれる心配はありません。

別の解き方

空気の部分だけで考えることもできます。ふたをしているので、容器の中は「水 $+$ 空気」でいつもいっぱいです。空気の体積は $24 \times 5 = 120\ \text{cm}^3$。図 1 の向きにもどすと、空気は上にたまり、その高さは $120 \div 60 = 2\ \text{cm}$。容器の高さは $5\ \text{cm}$ なので、水面の高さは $5 - 2 = 3\ \text{cm}$ と求められます。水の体積を出さなくてよいので、計算が少しらくになります。

ここに注意!

図 2 の「$5\ \text{cm}$」は BD の長さです$(3\ \text{cm}$・$4\ \text{cm}$・$5\ \text{cm}$ の直角三角形$)$。水面の高さを直接求めようとせず、「水面は台と平行」$\rightarrow$「相似な三角形」で空気の部分を求めるのが近道です。

ポイント

容器をかたむける問題は、①真横から見た図で考える、②水面は台と平行にかく、③水と空気のうち求めやすいほう$($今回は三角形の空気$)$を計算する。置き方を変えても水の体積は変わりません。

4 時計算(長い針が逆回り)

問題

4 豊子さんが持っている時計は普通の時計とは異なる時計で，短い針は普通の時計と同じように 12 時間で時計回りに 1 周しますが，長い針は 1 時間で**反時計回り**に 1 周します。この時計をある日の午前 9 時ちょうどに時刻を合わせ，その日の午後 9 時までの 12 時間の動きを観察します。このとき，次の各問いに答えなさい。

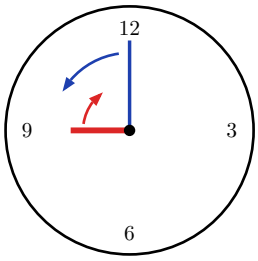
(1) はじめて長い針と短い針の間の角度が 180° となるのは午前 9 時から何分後ですか。

(2) 午前 9 時から午後 9 時までの間に，長い針と短い針の間の角度が 180° となるのは何回ありますか。

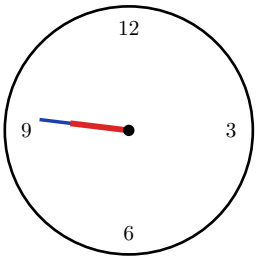
(1) 向かい合って進む旅人算と同じ

答え $41\frac{7}{13}$ 分後

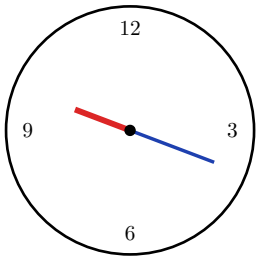
1. まず 1 分間に動く角度を出します。長い針は 60 分で 360° なので 1 分に 6°(反時計回り)。短い針は 12 時間 $=720$ 分で 360° なので 1 分に 0.5°(時計回り)です。
2. 午前 9 時、長い針は 12、短い針は 9 を指していて、間の角度は 90° です。長い針は 12 から 9 のほうへ(反時計回り)、短い針は 9 から 12 のほうへ(時計回り)動くので、2 本の針は「向かい合って近づく」ことになります。1 分間に $6+0.5=6.5°$ ずつ近づきます。



午前 9 時(間は 90°)



合わせて 90°動く → 重なる



さらに合わせて 180° → 一直線

青:長い針(反時計回り) 赤:短い針(時計回り)

3. はじめの 90° がなくなると 2 本の針は重なります。そこからすれちがってはなれていき、さらに合わせて 180° 動くと、間の角度が 180°(一直線)になります。つまり、合わせて $90+180=270°$ 動いたときです。
4. 1 分に合わせて 6.5° 動くので、

$$270\div 6.5=270\div\frac{13}{2}=270\times\frac{2}{13}=\frac{540}{13}=41\frac{7}{13}\ (\text{分後})$$

ここに注意!

ふつうの時計算では、2 本の針が同じ向きに回るので「差」の $6-0.5=5.5°$ を使います。この時計は逆向きに回るので「和」の 6.5° です。旅人算の「追いかけ」と「出会い」のちがいと同じです。

ポイント

時計算は旅人算。同じ向きなら 1 分に 5.5° ずつ差がつまり、逆向きなら 6.5° ずつ近づきます。「はじめに何度はなれているか」「合わせて何度動けばよいか」を図で確かめてから割り算します。

(2) 一直線になる周期を考える

答え **13 回**

1. 1 回目に一直線になったあとを考えます。合わせて $180°$ 動くとまた重なり、さらに $180°$ 動くとまた一直線になります。つまり、合わせて $360°$ 動くごとに 1 回、一直線になります。
2. 12 時間(720 分)で 2 本の針が合わせて動く角度は、
$$6.5 \times 720 = 4680 \ (°)$$
(長い針が 12 周で $4320°$、短い針が 1 周で $360°$ と考えても同じです。)
3. 1 回目までに $270°$ 使うので、残りは $4680 - 270 = 4410°$。この中に $360°$ が何回入るかを調べます。
$$4410 \div 360 = 12 \text{ あまり } 90$$
1 回目のあとに 12 回あるので、全部で $1 + 12 = 13$ 回です。
4. たしかめ:13 回目は合わせて $270 + 360 \times 12 = 4590°$ 動いたときで、$4680°$ より小さいので午後 9 時より前です。14 回目は $4950°$ で $4680°$ をこえるので、ありません。

ポイント

「1 回目まで」と「2 回目からの周期」は分けて考えます。1 回目までに動く角度$(270°)$と、その後の 1 周期$(360°)$がちがうので、全体をいきなり 360 で割らないこと。あまりの $90°$ は回数に入りません。

5　数の性質(分数と小数・くり返す小数)

問題

5　分母が分子よりも大きい分数について考えます。このような分数を，分子を分母で割り進めて小数で表したとき，割り切れるか，または，どこまでも割り切れないかのどちらかになります。

例えば，$\frac{7}{125}=0.056$ は割り切れ，$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots\cdots$ はどこまでも割り切れません。

このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 分数 $\frac{1}{\square}$ を小数で表したとき，どこまでも割り切れません。

$\square$ にあてはまる数のうち，2 以上 30 以下の整数は何個ありますか。

(1)　割り切れる分母は 2 と 5 だけでできた数

答え　**21 個**

1. 割り切れない分母を直接数えるのは大変なので、「割り切れる分母」を数えて全体からひきます。
2. 割り切れる小数は、$0.5=\frac{5}{10}$、$0.056=\frac{56}{1000}$ のように、分母が 10、100、1000、… の分数に直せます。$10=2\times5$ なので、分母が「2 と 5 だけをかけてできた数」のとき、そしてそのときだけ割り切れます。(分子が 1 なので約分はできません。)
3. 2 以上 30 以下で、2 と 5 だけをかけてできる数を書き出します。

> 2 だけ:2、4、8、16
> 5 だけ:5、25
> 2 と 5:10$(=2\times5)$、20$(=2\times2\times5)$

全部で $4+2+2=8$ 個です。(次の 32 や 40 は 30 をこえます。)

4. 2 以上 30 以下の整数は $30-2+1=29$ 個あるので、割り切れないのは

> $$29-8=21\ (\text{個})$$

ポイント

分数が小数で割り切れるのは、約分したあとの分母が 2 と 5 だけの積のとき。3 や 7 など、ほかの素数が 1 つでも入っていると割り切れません。「〜でないもの」は、全体から「〜であるもの」をひくと速いです。

問題

(2) $\dfrac{1}{41}$ を小数で表したとき，小数第 88 位の数字はいくつですか。

(2) くり返す小数 → 周期算

答え $\boxed{4}$

1. 実際に $1 \div 41$ を筆算で割り進めます。

$$1 \div 41 = 0.02439\,02439\cdots$$

小数第 5 位まで計算すると、あまりがはじめと同じ 1 にもどります$(100000 = 41 \times 2439 + 1)$。あまりが同じになると、その先は同じ計算のくり返しなので、「0, 2, 4, 3, 9」の 5 個の数字がくり返されます。

2. 小数第 88 位が、くり返しの何番目かを調べます。

$$88 \div 5 = 17 \text{ あまり } 3$$

17 回くり返したあとの 3 番目なので、「0, 2, 4, 3, 9」の 3 番目の 4 です。

ポイント

割り切れない分数は、あまりがもとにもどるまで割り進めると、くり返しのかたまりが見つかります。あとは周期算で「位の数 ÷ かたまりの個数」のあまりを見ます。

問題

(3) $\dfrac{145}{451} = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{41} + \dfrac{\boxed{\text{い}}}{11}$ であるから，$\dfrac{145}{451}$ を小数で表したとき，小数第 88 位の数字は $\boxed{\text{う}}$ となります。$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$，$\boxed{\text{う}}$ にあてはまる整数をそれぞれ答えなさい。

(3) 2 つのくり返す小数のたし算

答え $\boxed{\text{あ:2 い:3 う:6}}$

1. まず あ と い を求めます。$451 = 41 \times 11$ なので、右辺を通分すると分子は「あ $\times 11 +$ い $\times 41$」です。これが 145 になります。

2. 41 をかける い のほうが候補が少ないので、い を 1 から順に調べます。

$$\begin{aligned}
&\text{い} = 1 \text{ のとき } 145 - 41 = 104 \to 11 \text{ で割り切れない}\\
&\text{い} = 2 \text{ のとき } 145 - 82 = 63 \to 11 \text{ で割り切れない}\\
&\text{い} = 3 \text{ のとき } 145 - 123 = 22 \to 22 \div 11 = 2
\end{aligned}$$

い $= 4$ だと 164 で 145 をこえるので、あ $= 2$、い $= 3$ だけです。

3. それぞれを小数にします。$\dfrac{2}{41}$ は (2) の $\dfrac{1}{41}$ の 2 倍、$\dfrac{3}{11}$ は $3 \div 11$ を計算して、

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{41} = 0.04878\,04878\cdots \text{ (5 個でくり返し)}\\
&\frac{3}{11} = 0.27\,27\,27\cdots \text{ (2 個でくり返し)}
\end{aligned}$$

4. 5 個のくり返しと 2 個のくり返しを合わせるので、5 と 2 の最小公倍数の 10 個を 1 かたまりにしてたし算します。

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 0. & 0 & 4 & 8 & 7 & 8 & 0 & 4 & 8 & 7 & 8 \\ + & 0. & 2 & 7 & 2 & 7 & 2 & 7 & 2 & 7 & 2 & 7 \\ \hline & 0. & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 & 7 & 7 & \mathbf{6} & 0 & 5 \end{array}$$

かたまりの和 3215077605 は 10 けたにおさまっているので、次のかたまりからのくり上がりはなく、$\dfrac{145}{451} = 0.3215077605\,3215077605\cdots$ と 10 個の数字がくり返されます。

5 $88 \div 10 = 8$ あまり 8 なので、小数第 88 位は「$3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 0,\ 7,\ 7,\ 6,\ 0,\ 5$」の 8 番目の 6 です。う $= 6$。

ここに注意!

第 88 位の数字どうしを $8 + 7 = 15$ とたして「5」と答えるのはまちがいです。第 90 位が $8 + 7 = 15$ でくり上がり、第 89 位が $7 + 2 + 1 = 10$ でまたくり上がるので、第 88 位は $5 + 1 = 6$ になります。小数のたし算は下の位からのくり上がりがあるので、かたまりごと筆算するのが安全です。

ポイント

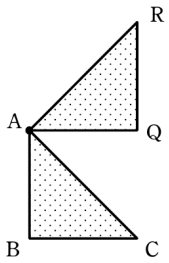
くり返す小数どうしをたすときは、くり返しの個数の最小公倍数(5 個と 2 個なら 10 個)を 1 かたまりにして筆算します。前の小問(2)の結果($\dfrac{1}{41}$ のくり返し)を使うように問題が作られていることにも気づきましょう。

6 平面図形(図形の回転・通過した部分の面積)

問題

6 AB = BC = 4 cm の直角二等辺三角形 ABC について，次の各問いに答えなさい。

(1) 下の＜図 1 ＞のように，三角形 ABC を点 A を中心に反時計回りに 90° 回転させると，点 B は点 Q，点 C は点 Rに重なりました。このとき，三角形 ABC が通過した部分の面積は何 cm^2 ですか。

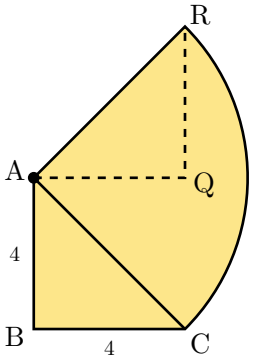


＜図 1 ＞

(1) 回転の中心が三角形の頂点

答え **$33.12\ cm^2$**

1. 図形が回転して通過する部分は、「中心からいちばん遠い点」と「中心からいちばん近い点」がえがく円の弧(こ)で決まります。中心 A は三角形の頂点なので、いちばん近い点は A 自身(きょり 0)、いちばん遠い点は C です。
2. 辺 AC は A を中心に 90° 回って AR に来ます。辺 AC が通った部分は、半径 AC、中心角 90° のおうぎ形です。通過した部分は、「はじめの三角形 ABC」と「おうぎ形 ACR」を合わせた形になります(終わりの三角形 AQR はおうぎ形の中に入っています)。



通過した部分(黄色)= 三角形 ABC + おうぎ形 ACR

3. おうぎ形の半径 AC の長さは分かりませんが、面積には「半径 × 半径」があれば十分です。AC は 1 辺 4 cm の正方形の対角線なので、正方形の面積を「対角線 × 対角線 ÷ 2」で表すと、

$$AC \times AC \div 2 = 4 \times 4 = 16 \rightarrow AC \times AC = 32$$

4. 面積を計算します。

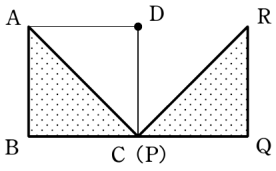
$$\text{おうぎ形} = 32 \times 3.14 \times \frac{90}{360} = 8 \times 3.14 = 25.12\ (cm^2)$$
$$\text{三角形 ABC} = 4 \times 4 \div 2 = 8\ (cm^2)$$
$$\text{合計} = 25.12 + 8 = 33.12\ (cm^2)$$

ポイント

半径の長さが分からなくても、正方形の対角線なら「半径 × 半径 = 正方形の面積 × 2」で求められます。回転の問題は、まず中心からいちばん遠い点・近い点を探しましょう。

問題

(2) 下の＜図 2 ＞のように，3 点 A，B，C を頂点とする正方形の残りの頂点を D とします。三角形 ABC を点 D を中心に反時計回りに 90° 回転させると，点 A は点 C がもともとあった点 P，点 B は点 Q，点 C は点 R に重なりました。このとき，三角形 ABC が通過した部分の面積は何 cm^2 ですか。



＜図 2 ＞

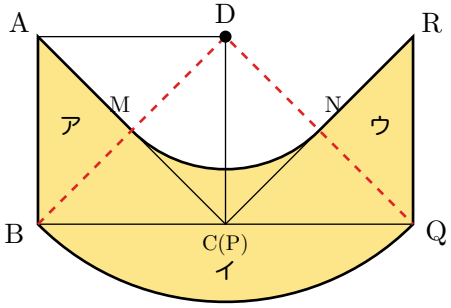
(2) 回転の中心が三角形の外

答え **$26.84\ cm^2$**

1. 中心 D からいちばん遠い点は B です。DB は正方形の対角線なので、(1) と同じく $DB \times DB = 32$ です。
2. いちばん近い点を探します。D にいちばん近いのは辺 AC の上の点で、D から AC に垂直に引いた線の足、つまり AC の真ん中の点 M です(正方形の対角線の交点)。DM は対角線の半分なので、DM を 1 辺とする正方形は、正方形 ABCD のちょうど半分の面積です。

$$DM \times DM = 16 \div 2 = 8$$

3. 通過した部分の外側は B がえがく弧(B→Q)、内側は M がえがく弧(M→N)になります。N は PR の真ん中の点です。図のように 3 つに分けます。



通過した部分(黄色)= 三角形 ABM + 太い弧にはさまれた部分 + 三角形 NQR

4. ア(三角形 ABM)は、DB より左がわの部分です。三角形 ABC を AC の真ん中で半分にした形なので $8 \div 2 = 4\ cm^2$。ウ(三角形 NQR)も同じく $4\ cm^2$ です。
5. イは、DB から DQ までの 90° のあいだで、大きいおうぎ形(半径 DB)から小さいおうぎ形(半径 DM)をひいた形です。3.14 はまとめて計算します。

$$(32-8) \times 3.14 \times \frac{90}{360} = 24 \times 3.14 \div 4 = 6 \times 3.14 = 18.84\ (cm^2)$$

6. ア・イ・ウを合計すると、$4 + 18.84 + 4 = 26.84\ (cm^2)$ です。

ここに注意!

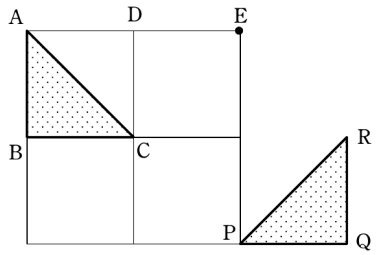
いちばん近い点を頂点 A や C(きょり 4 cm)だと思いこむと、内側の弧をまちがえます。辺の途中に、もっと近い点(垂直に下ろした足)がないかを必ず確かめましょう。

ポイント

中心が図形の外にあるとき、通過部分は「いちばん遠い点の弧」と「いちばん近い点の弧」にはさまれた形 + はじめと終わりの図形の一部。中心と遠い点・近い点を結ぶ線で図を区切ると、おうぎ形の差と三角形に分けられます。

問題

(3) 下の＜図 3 ＞のように，(2) の正方形 ABCD と 1 辺の長さが 4 cm の正方形を 3 個用いて，大きい正方形をつくります。三角形 ABC を大きい正方形の頂点 E を中心に反時計回りに 90° 回転させると，点 A は点 P，点 B は点 Q，点 C は点 R に重なりました。このとき，三角形 ABC が通過した部分の面積は何 cm^2 ですか。

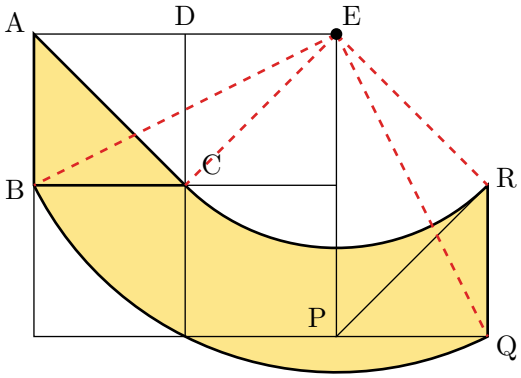


＜図 3 ＞

(3) 中心がさらに遠いとき

答え **45.68 cm^2**

1. 中心 E からいちばん遠い点は B です。いちばん近い点を探します。EC も AC も正方形の対角線で、角 ACD = 45°、角 DCE = 45° なので、EC と AC は垂直です。E から辺 AC に下ろした垂直な線の足がちょうど C なので、いちばん近い点は C です。
2. 通過した部分は、辺 AB、B がえがく弧(B→Q)、辺 QR、C がえがく弧(R→C)、辺 CA で囲まれた形になります。



通過した部分(黄色)。赤い点線は中心 E と各点を結んだ線

3. 面積は「外側の線で囲んだ全体」から「通らなかった内側」をひいて求めます。

> 全体 = 三角形 EAB + おうぎ形 EBQ + 三角形 EQR
> ひく部分 = 三角形 EAC + おうぎ形 ECR

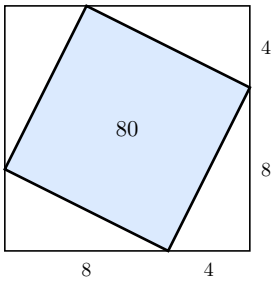
4 三角形の部分を先に片づけます。三角形 EQR は三角形 EBC を回転させたものなので、同じ面積です。すると

> 三角形 EAB + 三角形 EBC − 三角形 EAC
> $= 8 \times 4 \div 2 + 4 \times 4 \div 2 - 8 \times 4 \div 2 = 16 + 8 - 16 = 8\ (\mathrm{cm}^2)$

(三角形 EAB は底辺 AE = 8・高さ AB = 4、三角形 EBC は底辺 BC = 4・高さ 4、三角形 EAC は底辺 AE = 8・高さ 4 です。答えの 8 cm² は三角形 ABC の面積と同じになります。)

5 次に、おうぎ形の「半径 × 半径」を求めます。EC は 1 辺 4 cm の正方形の対角線なので EC × EC = 32。EB はたて 4 cm・横 8 cm の長方形の対角線です。EB を 1 辺とする正方形を、1 辺 8 + 4 = 12 cm の正方形の中にななめにかくと、4 すみに直角三角形(4 cm と 8 cm)が 4 つできるので、

> $\mathrm{EB} \times \mathrm{EB} = 12 \times 12 - (8 \times 4 \div 2) \times 4 = 144 - 64 = 80$



EB を 1 辺とする正方形の面積 $= 144 - 16 \times 4 = 80$

6 どちらのおうぎ形も中心角は 90° なので、まとめて計算します。

> $$(80 - 32) \times 3.14 \times \frac{90}{360} = 48 \times 3.14 \div 4 = 12 \times 3.14 = 37.68\ (\mathrm{cm}^2)$$

7 三角形の分と合計すると、$8 + 37.68 = 45.68\ (\mathrm{cm}^2)$ です。

ポイント

回転で通過する部分は、(1)〜(3) のどれも「三角形の分 + (遠い点の半径×半径 − 近い点の半径×半径)× 3.14 × 中心角/360」の形にまとまります。ななめの線の「長さ × 長さ」は、その線を 1 辺とする正方形を方眼にかいて、外側の正方形から直角三角形 4 つをひいて求めます。