2023 年度 豊島岡女子学園中学校

第 3 回 算数 解答解説

■ 解答一覧

大問	小問	答え
1	(1)	$\frac{23}{42}$
1	(2)	17.5
1	(3)	中央値 2.5、最頻値 2
1	(4)	2 枚
2	(1)	600 g
2	(2)	4 種類
2	(3)	3 : 5
2	(4)	205.94 cm^2
3	(1)	商品(あ) 10 個、商品(い) 30 個
3	(2)	7 通り
4	(1)	(ア)、(エ)
4	(2)	ア 4、イ 37
5	(1)	180 m
5	(2)	84
5	(3)	ア 12、イ 20
6	(1)①	6 cm^2
6	(1)②	$3\frac{1}{3}$ cm^3
6	(2)	225 : 88

1 計算・小問集合

(1) 分数の四則計算

問題

(1) $1\frac{1}{6}-\left(\frac{6}{7}-\frac{5}{8}\right)\div\frac{3}{8}$ を計算しなさい。

答え $\boxed{\frac{23}{42}}$

1. まず、かっこの中を計算します。分母の 7 と 8 を通分して、

$$\frac{6}{7}-\frac{5}{8}=\frac{48}{56}-\frac{35}{56}=\frac{13}{56}$$

2. ひき算より先に、わり算をします。わり算は「逆数をかける」に直して約分します。

$$\frac{13}{56}\div\frac{3}{8}=\frac{13}{56}\times\frac{8}{3}=\frac{13}{7\times3}=\frac{13}{21}$$

3. 最後にひき算です。$1\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$ なので、分母を 42 にそろえます。

$$\frac{7}{6}-\frac{13}{21}=\frac{49}{42}-\frac{26}{42}=\frac{23}{42}$$

ポイント

計算の順番は「かっこ → かけ算・わり算 → たし算・ひき算」。わり算をかけ算に直したら、かける前に約分(ここでは 56 と 8)をすると数が小さくなってミスが減ります。

(2) 分母ごとにまとめる(群数列)

問題

(2) 次の 28 個の数の和を求めなさい。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{5},$$
$$\frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{7}$$

答え $\boxed{17.5}$

1. 28 個をそのまま通分するのは大変なので、**分母が同じものどうしをグループ**にして、グループごとの和を調べます。

分母 1:$\frac{1}{1}=1$　　分母 2:$\frac{1+2}{2}=1.5$　　分母 3:$\frac{1+2+3}{3}=2$　　分母 4:$\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$

2. グループの和は 1、1.5、2、2.5、… と **0.5 ずつ増える**ことが分かります。なので、分母 5 は 3、分母 6 は 3.5、分母 7 は 4 です。

3. 1 から 4 まで 0.5 ずつ増える 7 個の数(等差数列)の和を求めます。

$$(1+4)\times7\div2=17.5$$

ポイント

分数がずらっと並んでいたら、「分母が同じものでグループ分け → グループごとの和を調べて規則を見つける」。等差数列の和は (はじめ+おわり)×個数÷2 です。

(3) 中央値と最頻値

問題

(3) 次の 10 個のデータについて，中央値と最頻値(さいひんち)をそれぞれ求めなさい。

5，2，4，1，2，2，3，5，4，2

答え 中央値 **2.5**、最頻値 **2**

1. 中央値(ちゅうおうち)は「小さい順に並べたときの真ん中の値」なので、まず小さい順に並べかえます。

$$1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5$$

2. データは 10 個(偶数個)なので、真ん中は 5 番目と 6 番目の 2 つです。このときは **2 つの平均**が中央値になります。5 番目は 2、6 番目は 3 だから、

$$(2+3) \div 2 = 2.5$$

3. 最頻値(さいひんち)は「いちばん多く出てくる値」です。2 が 4 回でいちばん多いので、最頻値は 2 です。

ポイント

中央値は必ず「並べかえてから」数える。個数が偶数のときは真ん中 2 つの平均。平均値・中央値・最頻値の 3 つの意味をセットで覚えておきましょう。

(4) 3 種類のつるかめ算(はんぱに注目)

問題

(4) 10 円玉と 50 円玉と 100 円玉が合わせて 14 枚あり，その合計金額は 640 円でした。100 円玉は何枚ありますか。

答え **2 枚**

1. 3 種類あるので、そのままではつるかめ算が使えません。そこで合計 640 円の「**40 円**」というはんぱに注目します。50 円玉と 100 円玉は何枚あっても合計が 50 円の倍数なので、はんぱの 40 円は 10 円玉で作るしかありません。
2. 10 円玉の合計は 40 円、90 円、140 円、… のどれかなので、10 円玉は 4 枚、9 枚、14 枚 のどれかです(全部で 14 枚だからここまで)。
3. **10 円玉が 4 枚のとき**:残りは $14-4=10$ 枚で $640-40=600$ 円。ここからはふつうのつるかめ算です。10 枚全部が 50 円玉だとすると 500 円で、600 円に 100 円足りません。50 円玉 1 枚を 100 円玉にかえると 50 円増えるので、

$$(600-50\times 10)\div(100-50)=2\ (\text{枚})$$

100 円玉 2 枚、50 円玉 8 枚でぴったりです。

4. **10 円玉が 9 枚のとき**:残りは 5 枚で 550 円。5 枚全部が 100 円玉でも 500 円にしかならないので、できません。**14 枚のとき**は 140 円にしかならず、これもできません。よって答えは 2 枚です。

ポイント

3 種類のつるかめ算は、「一の位・十の位のはんぱを作れるのはどれか」を考えて 1 種類の枚数をしぼり、2 種類のつるかめ算に直します。しぼった候補は全部たしかめること。

2　小問集合(食塩水・場合の数・平面図形)

(1)　水を蒸発させる(食塩の量は変わらない)

問題

(1) 濃度(のうど)が 8 % の食塩水から，200g の水を蒸発させたところ，濃度が 12 % になりました。濃度が 8 % の食塩水は何 g ありましたか。

答え　**600 g**

1. 水を蒸発(じょうはつ)させても、**とけている食塩の量は変わりません。**ここがこの問題のかぎです。
2. 食塩の量が同じとき、濃度と食塩水の重さは逆比になります。濃度の比が $8:12=2:3$ なので、食塩水の重さの比は、はじめ：あと $=③:②$ です。
3. はじめとあとの差 $③-②=①$ が、蒸発した水 200 g にあたります。なので、はじめの食塩水は

$$③=200\times 3=600\ (\mathrm{g})$$

(たしかめ:食塩は $600\times 0.08=48$ g。蒸発後は 400 g で、$48\div 400=0.12\to 12$ %。合っています。)

ポイント

食塩水の問題は、まず「変わらないものは何か」を考える。水を蒸発させる・水を加える → 食塩が一定 → 濃度の逆比が食塩水の重さの比。

(2)　円周上の点で作る四角形(間の数で分ける)

問題

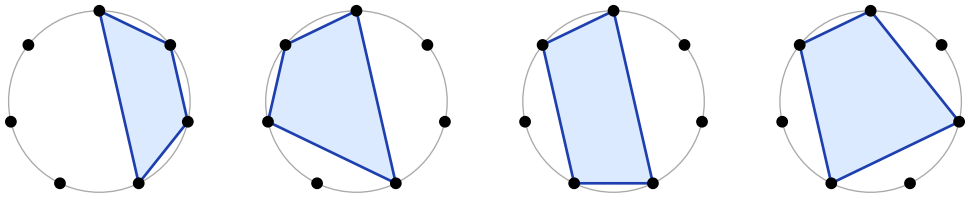
(2) ある円周上に円周を 7 等分する点をとり，これらの点から 4 つの点を選んで四角形をつくるとき，異なる形の四角形は何種類できますか。ただし，裏返したり回転させたりして重なるものは 1 種類と数えるものとします。

答え　**4 種類**

1. 4 つの点を選ぶと、円周は 4 つの部分に分かれます。円周は 7 等分されているので、4 つの部分の「区間の数」をたすと 7 になります。四角形の形は、**この 4 つの数とその並び方**で決まります。
2. 1 以上の数 4 つで和が 7 になる組み合わせを、大きい順に書き出します。

$$(4,1,1,1)\qquad (3,2,1,1)\qquad (2,2,2,1)$$

3. それぞれ、円のまわりへの並べ方が何種類あるかを考えます。回したり裏返したりして同じになるものは 1 種類です。
   - $(4,1,1,1)$:4 をどこに置いても回せば同じなので **1 種類**。
   - $(2,2,2,1)$:1 をどこに置いても同じなので **1 種類**。
   - $(3,2,1,1)$:3 と 2 が「となり合う」場合と「向かい合う」場合で形がちがうので **2 種類**。(3 の右どなりに 2 がくる場合と左どなりにくる場合は、裏返すと重なります。)



4 種類の四角形(数字は点と点の間の区間の数)

4 合わせて $1+2+1=4$ 種類です。

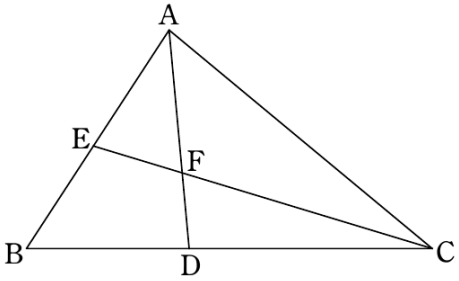
ポイント

円周を等分した点で図形を作る問題は、頂点を選ぶのではなく「頂点と頂点の間の区間の数」の組み合わせで数えると、同じ形をだぶって数えずにすみます。

(3) 平行線を引いて相似を作る

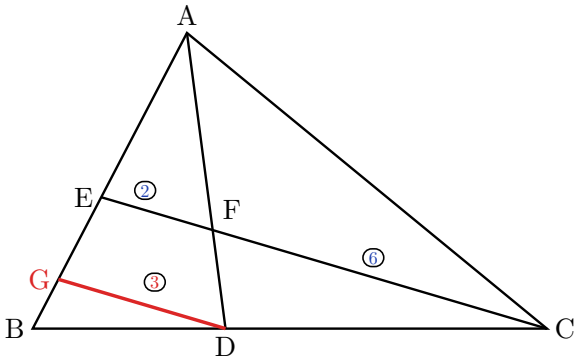
問題

(3) 下の図の三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D を，辺 AB 上に点 E をとり，直線 AD と直線 CE の交わる点を F としたところ，AF : FD = 2 : 1，EF : FC =1 : 3 となりました。このとき，BD : DC を求めなさい。



答え **3 : 5**

1 分かっている比 (AF : FD と EF : FC) は、三角形の中でななめに交わる線の上にあって、このままでは使いにくいです。そこで、**D を通って CE に平行な線**を引き、AB と交わる点を G とします。平行線を引くと相似な三角形(ピラミッド型)が 2 組できるからです。



D から CE に平行な線 DG を引く

2 **三角形 AGD に注目**します。EF と GD は平行なので、三角形 AEF と三角形 AGD は相似です。AF : AD = 2 : (2 + 1) = 2 : 3 だから、EF : GD = 2 : 3 です。そこで EF = ②、GD = ③ とおきます。

3 EF : FC = 1 : 3 なので、EF = ② のとき FC = ⑥。よって EC = ② + ⑥ = ⑧ です。

4 **三角形 BCE に注目**します。GD と EC は平行なので、三角形 BDG と三角形 BCE は相似です。

$$\mathrm{BD} : \mathrm{BC} = \mathrm{GD} : \mathrm{EC} = ③ : ⑧$$

BC が 8 のうち BD が 3 なので、BD : DC = 3 : (8 − 3) = 3 : 5 です。

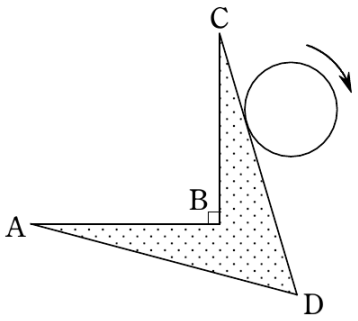
ポイント

三角形の中で 2 本の線が交わり、線の上の比が分かっているときは、「求めたい辺の上の点(ここでは D)から、もう一方の線に平行な線を引く」と、ピラミッド型の相似が 2 つできて比がつながります。

(4) 円が図形のまわりを転がる(へこんだ角に注意)

問題

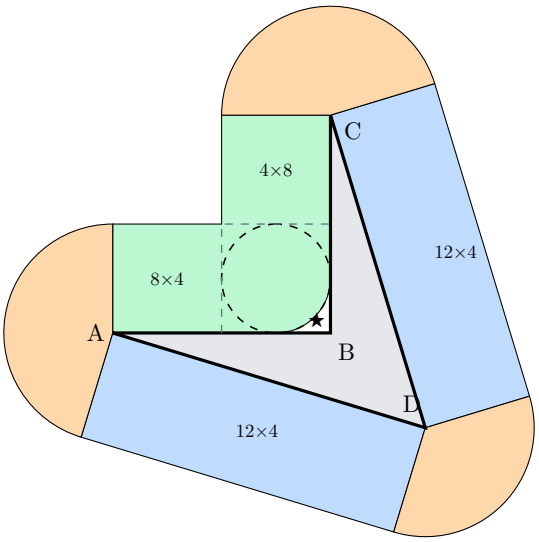
(4) 下の図において，直線 AB と 直線 BC の長さはどちらも 8 cmで，角 ABC の大きさは 90° です。また，直線 AD と直線 DC の長さはどちらも 12 cm です。
半径 2cm の円が，色のついた図形の外側を辺に沿って，転がって 1 周するとき，この円が通過する部分の面積は何 cm^2 ですか。



答え **205.94 cm^2**

1 円が図形の外側を転がるとき、円が通る部分は次の 3 種類に分けて考えます。円の直径は $2 \times 2 = 4$ cm です。

- まっすぐな辺に沿うところ → **はば 4 cm の長方形**
- とがった角(A、C、D)を回るところ → **半径 4 cm のおうぎ形**
- へこんだ角(B)のところ → 円が角のおくまで入れないので**別に考える**



円が通る部分(青:長方形、オレンジ:おうぎ形、緑:へこんだ角 B のまわり)

2 **辺 AD、DC に沿う長方形**(青)は、たて 4 cm、横 12 cm が 2 つです。

$$12 \times 4 \times 2 = 96 \ (\text{cm}^2)$$

3 **へこんだ角 B のまわり**(緑)を考えます。AB に沿う長方形 8×4 と、BC に沿う長方形 4×8 を合わせると、角のところの正方形 4×4 が重なるので 1 回分ひきます。さらに、円は角 B のおくまで入れないので、図の ★ のすきまは通りません。★ は「1 辺 2 cm の正方形 − 半径 2 cm の円の $\frac{1}{4}$」です。

$$★ = 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 3.14 \div 4 = 4 - 3.14 = 0.86 \ (\text{cm}^2)$$

$$\text{緑の部分} = 32 + 32 - 16 - 0.86 = 47.14 \ (\text{cm}^2)$$

4 **おうぎ形**(オレンジ)は A、C、D の 3 か所で、半径はどれも 4 cm です。1 つの角でのおうぎ形の中心角は、まわり 360° から長方形の直角 2 つと図形の内側の角をひいたものなので、「180° − 内側の角」です。3 か所の合計は

$$180 \times 3 - (\text{角 A} + \text{角 C} + \text{角 D})$$

です。四角形 ABCD の内側の角の和は 360° で、B の内側の角は $360 - 90 = 270°$ なので、角 A + 角 C + 角 D $= 360 - 270 = 90°$ です。よって中心角の合計は $540 - 90 = 450°$ になります。

$$4 \times 4 \times 3.14 \times \frac{450}{360} = 20 \times 3.14 = 62.8 \ (\text{cm}^2)$$

5 全部を合わせます。

$$96 + 47.14 + 62.8 = 205.94 \ (\text{cm}^2)$$

ここに注意!

1 つ 1 つの角度(角 A や角 D)は求められません。でも「3 つ合わせて 90°」は分かるので、おうぎ形は**まとめて**計算します。また、へこんだ角では、すきま ★ をひき忘れないようにしましょう。

ポイント

円が図形の外側を 1 周する問題は「長方形 + おうぎ形」。とがった角のおうぎ形の中心角は「180° − 内角」で、合計をまとめて出す。へこんだ角では円がはまった図をかいて、重なりと届かないすきまを調べます。

3 文章題(消去算・いれかえ)

問題

3 ある工場では，材料 A を 10g と材料 B を 20g 使って商品（あ）を 1 個作り，材料 A を 15g と材料 B を 15g 使って商品（い）を 1 個作っています。このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 材料 A を 550g，材料 B を 650g 用意し，商品（あ）と商品（い）を作りました。このとき，商品（あ）と商品（い）はそれぞれ何個ずつ作りましたか。ただし，材料はすべて使うものとします。

(2) 材料 A を 580g，材料 B を 650g 用意し，個数の合計が (1) の場合と同じになるように商品（あ）と商品（い）を作りました。このとき，商品（あ）と 商品（い）の個数の組み合わせとして考えられるものは，全部で何通りありますか。ただし，材料はすべて使わなくてもよいものとします。

(1) 2 つの材料の式をくらべる

答え 商品(あ) 10 個、商品(い) 30 個

1 1 個作るのに使う材料を表に整理します。

	材料 A	材料 B
商品(あ) 1 個	10 g	20 g
商品(い) 1 個	15 g	15 g

2 商品(い) は、A も B も同じ 15 g ずつ使うことに注目します。
材料は全部使うので、(あ) の個数を あ、(い) の個数を い と書くと、

> 材料 A:$10 \times$ あ $+ 15 \times$ い $= 550$ …(ア)
> 材料 B:$20 \times$ あ $+ 15 \times$ い $= 650$ …(イ)

3 (ア)と(イ)は「$15 \times$ い」の部分が同じなので、ちがいは (あ) だけから生まれます。
(イ) から (ア) をひくと、$10 \times$ あ $= 650 - 550 = 100$ なので、(あ) は $100 \div 10 = 10$ 個です。

4 (ア) にもどして、$15 \times$ い $= 550 - 10 \times 10 = 450$ なので、(い) は $450 \div 15 = 30$ 個です。 (たしかめ: 材料 B は $20 \times 10 + 15 \times 30 = 650$ g。合っています。)

ポイント

2 つの式に同じかたまりがあったら、ひき算して消す(消去算)。表にまとめると「どこが同じか」が見つけやすくなります。

(2) 1 個ずついれかえて調べる

答え 7 通り

1 個数の合計は (1) と同じ $10 + 30 = 40$ 個です。今度は材料があまってもよいので、「A は 580 g 以下、B は 650 g 以下」になる組み合わせを数えます。

2 はじめに、**40 個全部を 商品(い) にした場合**を考えます。A も B も $15 \times 40 = 600$ g 使います。B は 650 g 以下なので大丈夫ですが、A は 580 g をこえているので、このままでは作れません。

3 ここから (い) 1 個を (あ) 1 個に**いれかえる**と、A は $15-10=5$ g 減り、B は $20-15=5$ g 増えます。

- A を 600 g から 580 g 以下にするには、$(600-580)\div 5=4$ 回以上いれかえる必要があります。
- B は 600 g から 650 g までしか増やせないので、いれかえは $(650-600)\div 5=10$ 回までです。

4 つまり、(あ) の個数は 4 個以上 10 個以下です。表でたしかめます。

(あ)の個数	3	4	5	6	7	8	9	10
(い)の個数	37	36	35	34	33	32	31	30
材料 A (g)	585	580	575	570	565	560	555	550
材料 B (g)	615	620	625	630	635	640	645	650

(あ) が 3 個だと A が 585 g で足りず、11 個だと B が 655 g で足りません。

5 (あ) が 4、5、6、7、8、9、10 個 の $10-4+1=7$ 通りです。

ポイント

合計の個数が決まっている問題は、「全部を一方にした場合」からスタートして、1 個いれかえると何がどれだけ増減するかを調べる(つるかめ算の考え方)。「以下」の条件が 2 つあるときは、それぞれからいれかえ回数のはんいを出します。

4 数の性質(倍数・約数、あまり)

問題

4 45 人のクラスがあり，生徒にはそれぞれ 1 番, 2 番, … , 45 番と出席番号が与えられています。このクラスでは，次の方法で生徒が 1 人ずつ発表することになりました。

> A 月 B 日であった場合，1 人目は B 番の生徒が発表する。2 人目以降は，直前に発表した生徒の出席番号の数に A を加えた数の出席番号の生徒が発表する。
> ただし，その数が 45 を超えた場合は，その数から 45 を引いた数の出席番号の生徒が発表する。また，1 回発表した生徒が 2 回目に順番が回ってきた場合は，2 回目の発表はせず，その日の発表はその直前で終了となる。

例えば，9 月 1 日であった場合，1 人目は 1 番の生徒，2 人目は 10 番の生徒，3 人目は 19 番の生徒，4 人目は 28 番の生徒，5 人目は 37 番の生徒の順番で発表していき，次が 1 番の生徒となるので，この日は 5 人の生徒がそれぞれ 1 回ずつ発表し，この 5 人以外の生徒は 1 回も発表せず終了となります。このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 次の（ア）～（カ）から，その日に 45 人全員が発表することになる日をすべて選び，記号で答えなさい。

(ア) 8 月 30 日　(イ) 9 月 10 日　(ウ) 9 月 19 日
(エ) 11 月 15 日　(オ) 12 月 1 日　(カ) 12 月 4 日

(2) 9 月 1 日から 9 月 28 日の 28 日間，生徒は毎日発表し，最も多く発表した生徒は［ア］回発表しました。最も多く発表した生徒の中で，出席番号が最も大きい生徒は，出席番号が［イ］番です。［ア］と［イ］にあてはまる数を答えなさい。

(1) 何人が発表するか(最小公倍数)

答え (ア)、(エ)

1 まず、例の 9 月 1 日を調べ直します。出席番号は 9 ずつ増え、$1 \to 10 \to 19 \to 28 \to 37 \to 46$ で、46 は 45 をこえるので 1 番にもどります。つまり、**たした数の合計がちょうど 45 の倍数になったとき**に、はじめの人にもどって終わりになります。9 を 5 回たすと 45 なので、5 人で終わったのです。

2 A 月なら、A を何回かたして、はじめて 45 の倍数になるまで続きます。「A の倍数で、45 の倍数でもある、いちばん小さい数」=**A と 45 の最小公倍数**になるまで、ということです。なので、

> 発表する人数 = (A と 45 の最小公倍数) ÷ A

です。何日 (B) かは、スタートの人が変わるだけで、人数には関係ありません。

3 月ごとに人数を調べます。

月 (A)	45 との最小公倍数	発表する人数	記号
8	360	$360 \div 8 = 45$ 人	(ア)
9	45	$45 \div 9 = 5$ 人	(イ)(ウ)
11	495	$495 \div 11 = 45$ 人	(エ)
12	180	$180 \div 12 = 15$ 人	(オ)(カ)

4 45 人全員が発表するのは 8 月と 11 月なので、答えは (ア) と (エ) です。

ポイント

「同じ数ずつ進んで、ぐるっと回ってもとにもどる」問題は最小公倍数で考えます。$45 = 3 \times 3 \times 5$ なので、A が 3 の倍数でも 5 の倍数でもなければ(45 と 1 以外の公約数がなければ)全員を回ります。8 や 11 はこれにあたります。

(2) 9 でわったあまりでグループ分け

答え ア 4、イ 37

1 9 月は毎日、9 ずつ増える 5 人が発表します。この 5 人は「**9 でわったあまりが同じ**」5 人です。たとえば 9 月 10 日は $10 \to 19 \to 28 \to 37 \to 1$ で、9 月 1 日と同じ 5 人(9 でわると 1 あまる人たち)になります。

2 45 人を、9 でわったあまりで 9 つのグループに分け、どの日にどのグループが発表するかを表にします。

9 でわったあまり	発表する 5 人	発表する日
1	1, 10, 19, 28, 37 番	1 日, 10 日, 19 日, **28 日** → 4 回
2	2, 11, 20, 29, 38 番	2 日, 11 日, 20 日 → 3 回
3	3, 12, 21, 30, 39 番	3 日, 12 日, 21 日 → 3 回
⋮	⋮	⋮
0 (わり切れる)	9, 18, 27, 36, 45 番	9 日, 18 日, 27 日 → 3 回

3 28 日間は $28 \div 9 = 3$ あまり 1 なので、9 日で 1 まわりするのを 3 回くり返して、最後に 28 日の 1 日分だけあまります。28 日に発表するのは「あまり 1」のグループなので、このグループだけが 4 回、ほかは 3 回です。よって ア は 4 です。

4 4 回発表したのは 1、10、19、28、37 番で、いちばん大きいのは 37 番です。よって イ は 37 です。

ポイント

「◯ずつ増えて、こえたらひく」は、◯でわったあまりが同じ仲間をめぐっているということ。あまりでグループに分けて表にすると、周期(ここでは 9 日で 1 まわり)が見えます。

5 速さ(往復の旅人算・ダイヤグラム)

問題

5 下の図のように，A 町と B 町の間に C 地点があり，A 町から C 地点までの距離(きょり)は 450 m です。豊子さんは A 町と C 地点の間を毎分 60m の速さで休まずに何度も往復し，花子さんは A 町と B 町の間を一定の速さで休まずに何度も往復します。豊子さんと花子さんが同時に A 町を出発するとき，次の各問いに答えなさい。ただし，以下の各問いにおいて，出会うとは，すれ違うことも，追いつくことも両方とも考えるものとします。



(1) 花子さんが毎分 75 m の速さで歩くとき，出発してから 16 分後に，A 町と C 地点の間ではじめて 2 人は出会いました。C 地点から B 町までの距離は何 m ですか。

以下，C 地点から B 町までの距離は，(1) で求めたものとします。

(2) 花子さんの速さが毎分 60 m より速く毎分 □ m より遅いとき，豊子さんが 2 回目に A 町に着くまでの間に，花子さんと 2 回出会いました。このとき，□ にあてはまる最も大きい数を答えなさい。

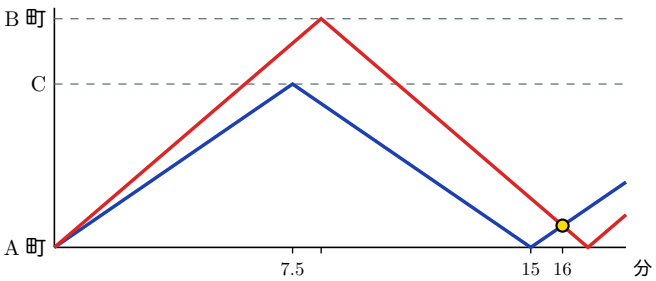
(3) 豊子さんが 2 回目に A 町に着くまでの間に，花子さんは B 町に一度も着いていませんでした。花子さんの速さが毎分 ア mより速く毎分 イ m より遅いとき，豊子さんが 3 回目に A 町に着くまでの間に，花子さんと 3 回出会いました。このとき，ア にあてはまる最も小さい数と，イ にあてはまる最も大きい数を答えなさい。

(1) 16 分後の 2 人の位置を調べる

答え **180 m**

1 まず豊子さんの動きを調べます。A 町から C 地点までは $450 \div 60 = 7.5$ 分なので、1 往復は 15 分です。16 分後は「1 往復して、さらに 1 分歩いたところ」なので、A 町から $60 \times 1 = 60$ m の地点にいます。ここが出会った場所です。

2 次に花子さんです。16 分で $75 \times 16 = 1200$ m 歩いています。花子さんの方が速いので、同じ向きに歩いている間は豊子さんに追いつかれません。はじめて出会うのは、**花子さんが B 町で折り返してもどってくるとちゅう**です。



(1) のダイヤグラム(青:豊子さん、赤:花子さん)

3 花子さんは A 町 → B 町 → 出会った地点 と歩いたので、歩いた 1200 m に、出会った地点から A 町までの 60 m をたすと、ちょうど A 町と B 町の間の 1 往復分になります。

> AB 間の往復 $= 1200 + 60 = 1260$ (m)　　AB 間 $= 1260 \div 2 = 630$ (m)
> C 地点から B 町 $= 630 - 450 = 180$ (m)

ここに注意!

「花子さんが 1 往復し終えて、2 回目に出発してから出会った」と考えると AB 間は $(1200 - 60) \div 2 = 570$ m になります。でもこの場合、花子さんは 15 分すぎに A 町の手前で、A 町を出たばかりの豊子さんとすれちがってしまい、16 分が「はじめて」になりません。だから 630 m の方が正しい答えです。

ポイント

往復する旅人算は、まず「その時刻に、それぞれがどこにいて、どちら向きか」を 1 人ずつ調べます。出会った地点までの道のりを 2 人分つなぐと「片道 × 2」などのきりのよい長さになります。ダイヤグラムをかくと状況が一目で分かります。

(2) 出会いの回数が変わる「境目」をさがす

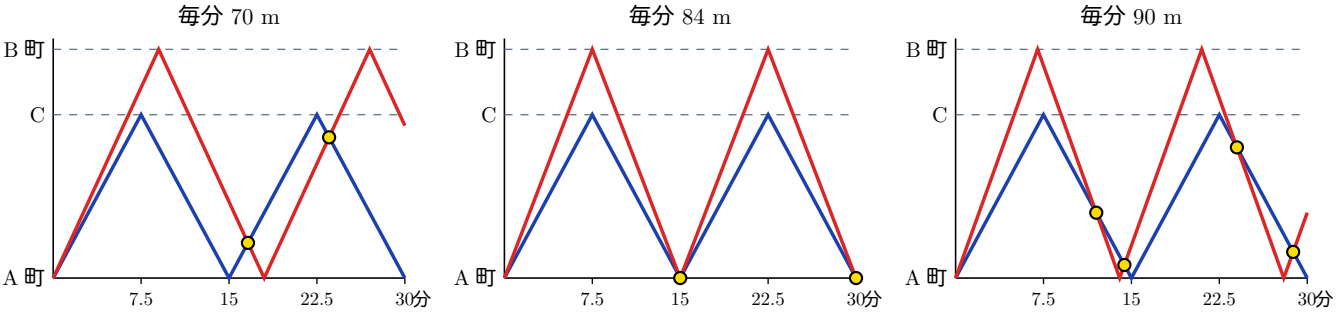
答え **84**

1 AB 間は 630 m です。豊子さんは 7.5 分に C、15 分に A、22.5 分に C、30 分に A(2 回目に A 町に着く)と動きます。花子さんの速さを 60 より少しずつ速くしていったとき、**出会いの回数が 2 回から変わる境目**をさがします。

2 花子さんが毎分 60 m より速く、あまり速くない場合(たとえば毎分 70 m)のダイヤグラムが下の左の図です。

- はじめの 15 分間:花子さんが先を歩き、B 町で折り返して豊子さんの後ろを追いかけますが、追いつく前に豊子さんが A 町に着きます。出会いは 0 回。
- 15 分〜30 分:A 町を出た豊子さんと、もどってくる花子さんがすれちがいます(1 回目)。そのあと A 町で折り返した花子さんと豊子さんがもう 1 回出会います(2 回目)。

合わせて 2 回です。



左:毎分 70m(2 回) 中:毎分 84m(境目) 右:毎分 90m(4 回)

3 花子さんをもっと速くすると、花子さんが A 町にもどる時刻がだんだん早くなります。そして、**花子さんが 1 往復して A 町にもどる時刻が、豊子さんが A 町にもどる 15 分より早くなる**と、はじめの 15 分間のうちに花子さんが後ろから豊子さんに追いつき、さらに A 町で折り返してすれちがうので、出会いが一気に増えます(右の図。同じことが 15 分〜30 分でも起きて 4 回になります)。

4 境目は、花子さんがちょうど 15 分で 1 往復するときです(中の図)。

$$630 \times 2 \div 15 = 84$$

毎分 84 m より遅ければ出会いは 2 回のままなので、□ にあてはまる最も大きい数は 84 です。

ここに注意!

毎分 60 m から 84 m の間では、2 回目の出会い方が「すれちがい」(毎分 76 m より遅いとき)から「追いつき」(毎分 76 m より速いとき)に変わりますが、どちらも回数は 2 回のままです。回数が変わるのは 84 のところだけです。

ポイント

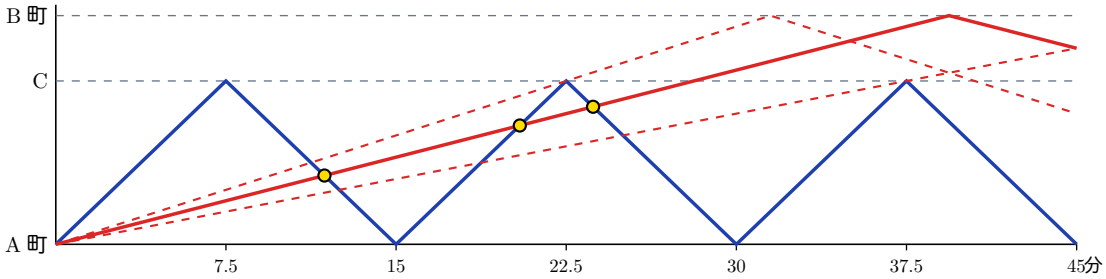
「速さが◯より速く△より遅いとき □ 回出会う」という問題は、ダイヤグラムで速さの線のかたむきを少しずつ変えて、回数が変わる**境目**をさがします。境目は、2 人が同時に折り返し地点(A 町や C 地点)にいるときです。

(3) C 地点を通る時刻が境目

答え **ア 12、イ 20**

1. 豊子さんが 2 回目に A 町に着く 30 分までに、花子さんは B 町に着いていません。つまり花子さんはとても遅く($630 \div 30 = 21$ より遅い)、今度は**豊子さんの方が速い**です。豊子さんは 7.5 分、22.5 分、37.5 分に C 地点で折り返し、45 分に 3 回目に A 町に着きます。
2. 豊子さんは A 町と C 地点の間しか歩かないので、**花子さんが A〜C の間にいる間だけ**出会えます。その間は、豊子さんが
   - C からもどるとき → 花子さんとすれちがう
   - A から出ていくとき → 花子さんを後ろから追いこす

   というように、片道 1 回ごとに 1 回ずつ出会います(はじめの片道は同時に出発して豊子さんが先に行くだけなので、出会いません)。



(3) のダイヤグラム(赤の実線:毎分 16m の例、点線:境目の毎分 12m と毎分 20m)

3. 片道ごとに出会いを数えます。

豊子さんの動き	時間	出会うための条件
C → A	7.5〜15 分	必ず出会う(1 回目)
A → C	15〜22.5 分	22.5 分に花子さんがまだ C の手前なら追いこす(2 回目)
C → A	22.5〜30 分	上と同じ条件ですれちがう(3 回目)
A → C	30〜37.5 分	37.5 分に花子さんがまだ C の手前なら追いこす(4 回目)
C → A	37.5〜45 分	上と同じ条件ですれちがう(5 回目)

ちょうど 3 回になるのは、花子さんが C 地点を通る時刻が **22.5 分より後で、37.5 分より前**のときです。

4 花子さんが 22.5 分より後に C に着く $\rightarrow$ 速さは $450 \div 22.5 = 20$ より遅い。
花子さんが 37.5 分より前に C に着く $\rightarrow$ 速さは $450 \div 37.5 = 12$ より速い。

> 毎分 12 m より速く、毎分 20 m より遅い　$\rightarrow$　ア $= 12$、イ $= 20$

5 たしかめます。C を通りすぎた花子さんは B 町で折り返しますが、C にもどってくるのは早くても $(630 + 180) \div 20 = 40.5$ 分で、豊子さんが最後に C を出る 37.5 分より後です。そのあとは速い豊子さんの後ろを歩くだけなので、もう出会いません。また、ちょうど毎分 20 m だと 22.5 分に C 地点で出会って 2 回、ちょうど毎分 12 m だと 37.5 分に C 地点で出会って 4 回になるので、12 と 20 はふくみません。

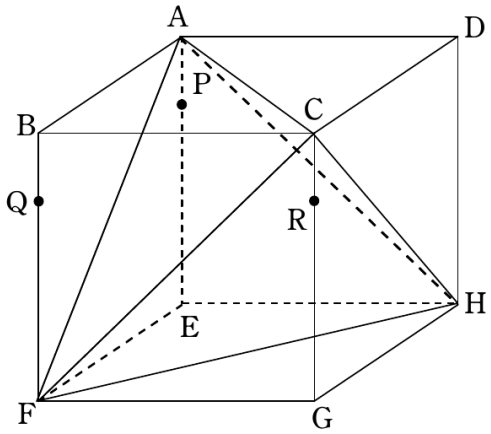
ポイント

一方が決まった区間(A〜C)しか動かないときは、「もう一方がその区間にいる間だけ出会える」と考えます。区間のはし(C 地点)を通る時刻と、相手の折り返し時刻(22.5 分、37.5 分)をくらべると、回数の境目が出ます。

6 立体図形(立方体の切断)

問題

6 下の図のように，1 辺が 4 cmの立方体 ABCD－EFGH があります。この立方体の頂点 A，C，F，H を結んでできる立体を立体（あ）とします。また，辺 AE 上に点 P，辺 BF 上に点 Q，辺 CG 上に点 R を，AP，BQ，CR の長さがそれぞれ 1cm となるようにとります。このとき，次の各問いに答えなさい。



(1) 立体（あ）を 3 点 P，Q，R を通る平面で切ったとき，切り口の図形を S，点 A を含む立体を立体（い）とします。

① S の面積は何 cm^2 ですか。

② 立体（い）の体積は何 cm^3 ですか。

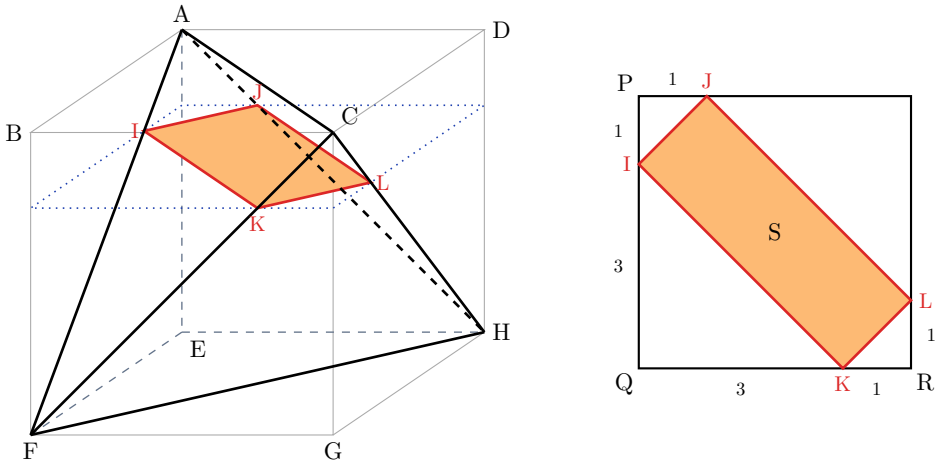
(2) 立方体 ABCD－EFGH を 3 点 B，P，R を通る平面で切ったとき，切り口の図形を T とします。また，立体（あ）を 3 点 B，P，R を通る平面で切ったとき，切り口の図形を U とします。このとき，（T の面積）：（U の面積）を求めなさい。

(1) ① 底面に平行に切る → 真上から見る

答え **6 cm^2**

1 P、Q、R はどれも上の面から 1 cm 下がった点なので、3 点を通る平面は**上の面に平行で、高さが上から 1 cm の平面**です。立体(あ) の辺のうち、この平面と交わるのは、上の A、C から下の F、H へのびる 4 本の辺 AF、AH、CF、CH です。交わる点を順に I、J、K、L とします。

2 AF、AH、CF、CH はどれも立方体の面(正方形)の対角線なので、「1 cm 下がると、横に 1 cm 進む」線です。なので I、J は A の真下の点 P から横に 1 cm、K、L は C の真下の点 R から横に 1 cm のところにあります。



左:見取図 右:切り口の高さの正方形を真上から見た図

3 切り口 S は長方形 IKLJ です。真上から見た図で、1 辺 4 cm の正方形から、四すみの直角二等辺三角形(等しい辺が 1 cm のもの 2 つと、3 cm のもの 2 つ)をひきます。

$$4\times4-1\times1\div2\times2-3\times3\div2\times2=16-1-9=6\ (\mathrm{cm}^2)$$

ポイント

底面に平行な平面で切るときは、「その高さの正方形」を真上から見た図をかいて、切り口の頂点の位置を書きこみます。面の対角線は「たて 1 : 横 1」で進むことを使うと、頂点の位置がすぐ分かります。

(1) ② 2 つのすい体に分ける

答え $3\frac{1}{3}\ \mathrm{cm}^3$

1 立体(い) は、頂点が A、C、I、J、K、L の 6 つある立体で、そのままでは公式が使えません。そこで、**A を頂点とする 2 つのすい体**に分けます。

- 四角すい A-IKLJ(底面が切り口 S)
- 三角すい A-CKL(残りの部分)

2 **四角すい A-IKLJ**:底面は S で 6 cm²、高さは A から切り口までの 1 cm です。

$$6\times1\div3=2\ (\mathrm{cm}^3)$$

3 **三角すい A-CKL**:三角形 CKL は、立体(あ) の面 CFH の上にあります。そこで、立体(あ) 全体を「底面が三角形 CFH、頂点が A の三角すい」と見ると、三角すい A-CKL は**頂点 A と高さが共通**なので、体積の比は底面積の比と同じです。

三角形 CKL と三角形 CFH は相似で、CK : CF = 1 : 4 なので、面積の比は $(1\times1):(4\times4)=1:16$ です。

4 立体(あ) の体積を求めます。立体(あ) は、立方体から、かどの三角すい(B、D、E、G のまわり)を 4 つ切り落としたものです。切り落とす三角すい 1 つは、底面が直角二等辺三角形、高さが 4 cm なので、

$$\text{かどの三角すい 1 つ}=4\times4\div2\times4\div3=\frac{32}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$
$$\text{立体(あ)}=4\times4\times4-\frac{32}{3}\times4=64-\frac{128}{3}=\frac{64}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

(立体(あ) は立方体のちょうど $\frac{1}{3}$ です。)

5 よって三角すい A-CKL は $\frac{64}{3}\times\frac{1}{16}=\frac{4}{3}\ \mathrm{cm}^3$ です。2 つを合わせて、

$$2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

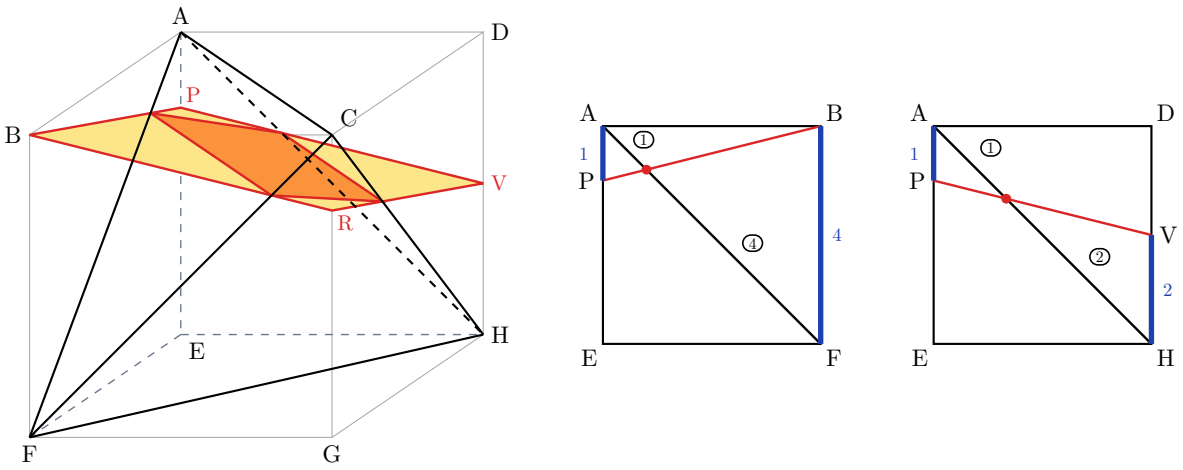
ポイント

公式のない立体は、1 つの頂点からすい体に分けます。「頂点と高さが共通なら体積比 = 底面積比」を使うと、ななめの三角すいも求められます。立方体の 4 頂点を結んだ立体(正四面体)の体積は立方体の $\frac{1}{3}$、というのも覚えておくと便利です。

(2) ななめの切り口は「真上から見た図」でくらべる

答え **225 : 88**

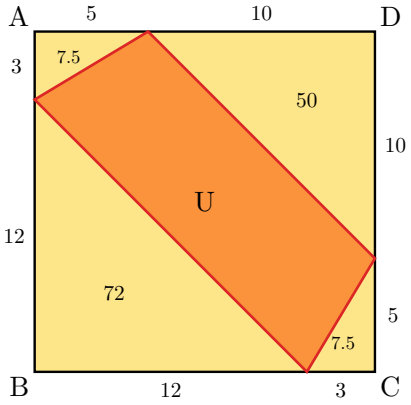
1. まず立方体の切り口 T を作ります。同じ面の上にある B と P、B と R を結びます。次に、**平行な面の切り口は平行**になるので、面 DCGH の切り口は、R を通って BP に平行な線です。BP は「横に 4 進むと 1 下がる」線なので、R(上から 1 cm)から 1 cm 下がって、辺 DH 上の「上から 2 cm」の点に着きます。この点を V とすると、T は四角形 BPVR(ひし形)です。
2. 次に U です。U は、同じ平面が立体(あ) の辺 AF、AH、CF、CH と交わる 4 点を結んだ四角形です。この 4 点は、**立方体の面ごとに、面の対角線と T の辺が交わる点**としてさがします。
   - 面 ABFE:対角線 AF と BP が交わります。AP と BF は平行で AP : BF = 1 : 4 なので、交点は AF を 1 : 4 に分けます。
   - 面 AEHD:対角線 AH と PV が交わります。AP と HV は平行で AP : HV = 1 : 2 なので、交点は AH を 1 : 2 に分けます。
   - 面 BCGF(CF と BR)も同じように CR : BF = 1 : 4、面 CGHD(CH と RV)も CR : HV = 1 : 2 です。



左:見取図(うすい色が T、こい色が U) 中・右:面 ABFE と面 AEHD を正面から見た図

3. T と U はななめの面なので、面積そのものを出すのは大変です。でも、**T と U は同じ平面の上にある**ので、真上から見ると同じ割合でちぢんで見えます。つまり「真上から見た図での面積の比」が、そのまま T と U の面積の比になります。
4. 真上から見ると、T は立方体の上の面の正方形 ABCD とぴったり重なります。U の 4 つの頂点は、正方形の辺の上に見えます。1 : 4 と 1 : 2 の両方が使えるように、**正方形の 1 辺を 15 目もり**(5 と 3 の最小公倍数)とします。
   - AF 上の点 → 辺 AB 上で A から $15\times\frac{1}{5}=3$
   - AH 上の点 → 辺 AD 上で A から $15\times\frac{1}{3}=5$
   - CF 上の点 → 辺 CB 上で C から 3

- CH 上の点 → 辺 CD 上で C から 5



真上から見た図(1 辺を 15 目もりとする)

5 正方形全体(T にあたる)は $15 \times 15 = 225$ です。U は、ここから四すみの直角三角形をひいたものです。

> A のかど:$3 \times 5 \div 2 = 7.5$　　C のかど:$3 \times 5 \div 2 = 7.5$
> B のかど:$12 \times 12 \div 2 = 72$　　D のかど:$10 \times 10 \div 2 = 50$
> $\mathrm{U} = 225 - (7.5 + 7.5 + 72 + 50) = 225 - 137 = 88$

よって (T の面積) : (U の面積) $= 225 : 88$ です。

ここに注意!

立体(あ) の辺 AC は、この平面より上にあり(AC の真下では平面の高さは上から 1 cm)、辺 FH は平面より下にあるので、平面と交わりません。だから U の頂点は AF、AH、CF、CH の上の 4 つだけです。

ポイント

ななめの切り口どうしの面積比は、同じ平面の上にあるなら「真上(または真横)から見た図」の面積比でくらべられます。切り口の頂点は、面ごとに正面から見て、平行線の相似(ちょうちょ型)で辺を何対何に分けるかを求めます。比がいくつか出てきたら、1 辺の長さを最小公倍数の目もりにそろえると計算が楽です。