2022 年度 豊島岡女子学園中学校

第 3 回 算数 解答解説

■ 解答一覧

大問	小問	答え
1	(1)	$\frac{1}{12}$
1	(2)	毎分 90 m
1	(3)	6 通り
1	(4)	60 cm^2
2	(1)	(う)
2	(2)	7.9 %
2	(3)	2115 年 3 月 9 日
2	(4)	8 : 3
3	(1)	毎分 250 m
3	(2)	2250 m
4	(1)	5 L
4	(2)	21
4	(3)	140
5	(1)	30 cm^2
5	(2)	798 cm^2
5	(3)	781 cm^2
6	(1)	2 cm^3
6	(2)	$5\frac{1}{3}$ cm^3

1 計算・小問集合

問題

(1) $\left(4\frac{2}{3}+\frac{11}{3}\div 4.4\right)\div 3-\frac{7}{4}$ を計算しなさい。

(1) 分数と小数のまじった計算

答え $\frac{1}{12}$

1. 小数と分数がまじっているので、小数を分数に直します。$4.4=\frac{44}{10}=\frac{22}{5}$ です。
2. かっこの中は、わり算を先に計算します。わり算は「逆数(ぎゃくすう)をかける」のでした。

$$\frac{11}{3}\div\frac{22}{5}=\frac{11}{3}\times\frac{5}{22}=\frac{5}{6}$$

(11 と 22 を約分)

3. かっこの中のたし算をします。$4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}=\frac{28}{6}$ なので、

$$\frac{28}{6}+\frac{5}{6}=\frac{33}{6}=\frac{11}{2}$$

4. 3 でわって、最後に $\frac{7}{4}$ をひきます。

$$\frac{11}{2}\div 3=\frac{11}{6}\qquad \frac{11}{6}-\frac{7}{4}=\frac{22}{12}-\frac{21}{12}=\frac{1}{12}$$

ポイント

小数と分数がまじった計算は、分数にそろえるのが安全です。計算の順番は「かっこの中 → かけ算・わり算 → たし算・ひき算」。途中で約分できるところは、そのつど約分して数を小さくしておきましょう。

問題

(2) 1440 m 離(はな)れた家と駅の間を往復します。行きに分速 60 m で進んだところ，往復の平均の速さが分速 72 m となりました。帰りの速さは毎分何 m ですか。

(2) 往復の平均の速さ

答え 毎分 90 m

1. 「平均の速さ」は、**進んだ道のりの合計 ÷ かかった時間の合計** です。速さをたして 2 でわるのではありません。
2. 往復の道のりは $1440\times 2=2880$ (m)。平均の速さが分速 72 m なので、往復にかかった時間は

$$2880\div 72=40\ (\text{分})$$

3. 行きは分速 60 m なので、行きにかかった時間は $1440\div 60=24$ (分)。だから、帰りにかかった時間は $40-24=16$ (分) です。

4 帰りは 1440 m を 16 分で進んだので、

$$1440 \div 16 = 90 \ (\text{m/分})$$

ここに注意!

「$(60 + \square) \div 2 = 72$ だから $\square = 84$」としてはいけません。行きと帰りでは、かかる時間がちがうからです。平均の速さは、かならず「道のりの合計 ÷ 時間の合計」で考えます。

ポイント

「平均の速さ」と書いてあったら、まず「合計の道のり」と「合計の時間」を求める。時間の合計が分かれば、あとは行き・帰りに分けるだけです。

問題

(3) 4 と 6 と □ の最小公倍数は 60 です。□ に当てはまる整数として考えられるものは何通りありますか。

(3) 最小公倍数から□をさがす

答え **6 通り**

1 まず、4 と 6 だけの最小公倍数を考えます。4 と 6 の最小公倍数は 12 です。だから、「12 と □ の最小公倍数が 60」になる □ をさがせばよいことになります。

2 60 を素数(そすう)のかけ算で表すと $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$、12 は $12 = 2 \times 2 \times 3$ です。12 には「5」が入っていないので、□ **はかならず 5 をふくんでいなければなりません**(5 の倍数)。

3 また、□ は 60 の約数でなければなりません(60 が □ の倍数だから)。つまり □ は「5 × (12 の約数)」の形です。12 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 の 6 個なので、

□ = 5, 10, 15, 20, 30, 60　の **6 通り**

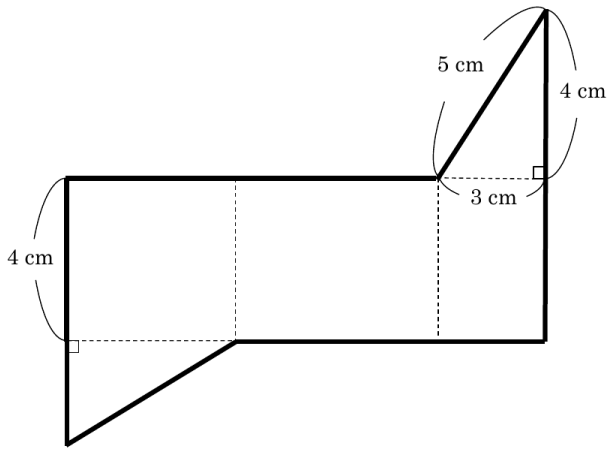
4 たしかめ:たとえば □ = 10 のとき、4 と 6 と 10 の最小公倍数は 60 で、合っています。□ = 12 のように 5 をふくまない数だと、最小公倍数は 12 になってしまいます。

ポイント

「最小公倍数が ◯ になる数をさがす」問題は、◯ を素数のかけ算に分けて、「足りない素数(ここでは 5)は □ がかならず持つ。それ以外は自由」と考えます。

問題

(4) 次のような三角柱の展開図があります。この三角柱の表面積は何 cm^2 ですか。



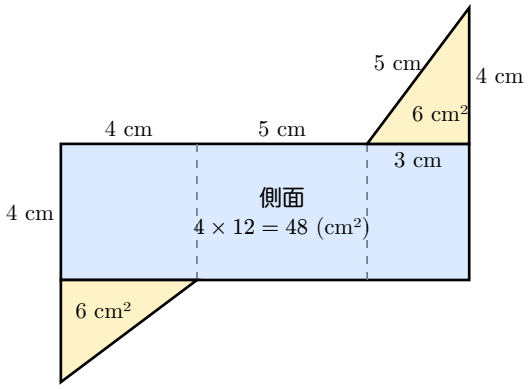
(4) 三角柱の展開図と表面積

答え $\boxed{60\ \mathrm{cm}^2}$

1 三角柱の底面は、右上にかいてある直角三角形(3 cm, 4 cm, 5 cm)です。左下の三角形も同じ形です。底面積は

$$3 \times 4 \div 2 = 6\ (\mathrm{cm}^2)$$

2 まん中の 3 つの長方形が側面です。組み立てると、長方形の横の辺は底面の三角形の 3 つの辺と重なるので、横の長さは 4 cm, 5 cm, 3 cm。合わせると底面のまわりの長さ $3+4+5=12\ (\mathrm{cm})$ です。



側面の 3 つの長方形をまとめると、たて 4cm・横(底面のまわりの長さ)12cm の大きな長方形

3 展開図の左に「4 cm」とあるので、三角柱の高さ(長方形のたて)は 4 cm です。側面積は

$$4 \times (3+4+5) = 4 \times 12 = 48\ (\mathrm{cm}^2)$$

表面積は「底面 2 つ + 側面」なので、

$$6 \times 2 + 48 = 60\ (\mathrm{cm}^2)$$

ポイント

柱(角柱・円柱)の表面積は「**底面積 × 2 + 側面積**」、側面積は「**高さ × 底面のまわりの長さ**」。側面の長方形を 1 つずつ計算するより、まとめて 1 つの大きな長方形として計算すると速くて正確です。

2　小問集合(文字式・食塩水・日暦算・平面図形)

問題

(1)　$x \times 5 - 10$ の式で表すことができるものは次のどれですか。(あ)～(え)の記号で答えなさい。ただし，[　] 内の単位で考えるものとします。

(あ) 1 個 x g の消しゴム 5 個を 0.01 kg の箱に入れた。

このとき，箱を含めたすべての重さ [g]

(い) 1 本のひもから x cm ずつ 5 本切り取ると 0.1 m 残った。

このとき，もとのひもの長さ [cm]

(う) 空のバケツに 1 回に x dL ずつ 5 回水を入れたあと 1 L くみ出した。

このとき，バケツに残っている水の量 [dL]

(え) 1 個 x 円のパンを 5 個買うと 1 個あたり 10 円引きになった。

このとき，支払った代金 [　円　]

(1)　式に合う場面をえらぶ

答え　(う)

1. (あ)～(え)をそれぞれ式に表して、$x \times 5 - 10$ と同じになるものをさがします。このとき、**単位を [ ] の中の単位にそろえる**ことが大切です。
2. (あ) $0.01\ \text{kg} = 10\ \text{g}$ です。消しゴム 5 個と箱の重さをたすので、$x \times 5 + 10$ (g)。たし算なのでちがいます。
3. (い) $0.1\ \text{m} = 10\ \text{cm}$ です。もとのひもは「切り取った分 + 残り」なので、$x \times 5 + 10$ (cm)。これもたし算なのでちがいます。
4. (う) $1\ \text{L} = 10\ \text{dL}$ です。x dL を 5 回入れてから 10 dL くみ出すので、$x \times 5 - 10$ (dL)。**これが同じ式です。**
5. (え) 1 個あたり 10 円引きなので、1 個のねだんが $(x - 10)$ 円になります。5 個で $(x - 10) \times 5 = x \times 5 - 50$ (円)。ひく数が 50 なのでちがいます。

ポイント

文字の式の問題は、(1) 単位をそろえる($1\ \text{L} = 10\ \text{dL}$、$0.01\ \text{kg} = 10\ \text{g}$、$0.1\ \text{m} = 10\ \text{cm}$)、(2)「1 個あたり」なのか「全体で」なのかを読み分ける、の 2 つに気をつけます。(え)のように「1 個あたり 10 円引き」は 5 個分で 50 円引きになります。

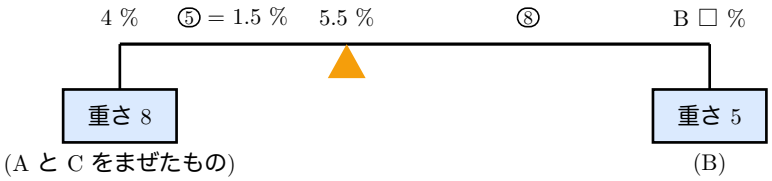
問題

(2)　食塩水 A，B，C があります。A と C を 1 : 3 の割合で混ぜると，4%の食塩水になります。A と B と C を 2 : 5 : 6 の割合で混ぜると，5.5%の食塩水になります。食塩水 B の濃度(のうど)は何%ですか。

(2)　3 つの食塩水をまぜる

答え　**7.9 %**

1. 2 回目のまぜ方「A : B : C = 2 : 5 : 6」の中の A と C に注目します。A : C = 2 : 6 = 1 : 3 なので、これは 1 回目のまぜ方と同じ割合です。つまり、**A 2 と C 6 をまぜた部分は、こさ 4 % の食塩水 8 になっています。**
2. だから 2 回目は、「4 % の食塩水 8」と「B(□ %)の食塩水 5」をまぜて、5.5 % になったと考えられます。これをてんびん図にかきます。



てんびん図:うでの長さの比は、重さの比 8 : 5 の逆比で 5 : 8

3. 重さの比が 8 : 5 なので、支点(してん)からのうでの長さの比は逆の 5 : 8 です。左のうでは $5.5 - 4 = 1.5$ (%) で、これが ⑤ にあたります。

$$① = 1.5 \div 5 = 0.3 \text{ (\%)} \qquad ⑧ = 0.3 \times 8 = 2.4 \text{ (\%)}$$

4. B のこさは、5.5 % より 2.4 % こいので、

$$5.5 + 2.4 = 7.9 \text{ (\%)}$$

別の解き方

食塩の重さで考えることもできます。A 200 g、B 500 g、C 600 g をまぜたとします。A と C の合計 800 g は 4 % なので、食塩は $800 \times 0.04 = 32$ (g)。全体 1300 g は 5.5 % なので、食塩は $1300 \times 0.055 = 71.5$ (g)。B 500 g の中の食塩は $71.5 - 32 = 39.5$ (g) なので、こさは $39.5 \div 500 = 0.079 \to 7.9$ %。

ポイント

3 つの食塩水をまぜる問題では、「前にまぜたものと同じ割合の部分」をさがして、ひとまとめにします。まとまれば、ふつうの 2 つの食塩水のてんびん図になります。A や C それぞれのこさは分からなくても解けます。

問題

(3) 2022 年 2 月 4 日からちょうど 34000 日後は，西暦(せいれき)何年の何月何日ですか。ただし，現在の暦(こよみ)では，うるう年（2 月が 29 日までの年）を次の①，②のように定めています。

① 西暦が 4 で割り切れる年をうるう年とする。

② ①の例外として，西暦が 100 で割り切れて 400 で割り切れない年はうるう年ではないとする。

(3) 34000 日後は何年何月何日?

答え **2115 年 3 月 9 日**

1. まず、うるう年を考えずに 1 年を 365 日として、34000 日がおよそ何年分かを調べます。

$$34000 \div 365 = 93 \text{ あまり } 55 \qquad (365 \times 93 = 33945)$$

だいたい 93 年後、つまり $2022 + 93 = 2115$ (年) ごろだと分かります。

2. 次に、2022 年 2 月 4 日から 2115 年 2 月 4 日までの 93 年間に、「2 月 29 日」が何回あるかを数えます。うるう年は 2024 年、2028 年、…、2112 年で、

$$(2112 - 2024) \div 4 + 1 = 23 \text{ (回)}$$

ただし、この中の **2100 年は「100 で割り切れて 400 で割り切れない年」なので、うるう年ではありません。**だから 2 月 29 日は $23 - 1 = 22$ (回) です。

3. よって、2022 年 2 月 4 日から 2115 年 2 月 4 日までは

$$33945 + 22 = 33967 \text{ (日)}$$

です。34000 日後までは、あと $34000 - 33967 = 33$ (日) あります。

4. 2115 年 2 月 4 日の 33 日後を求めます。$4 + 33 = 37$ なので「2 月 37 日」。2115 年は 4 で割り切れないので、うるう年ではなく、2 月は 28 日までです。

$$37 - 28 = 9 \quad \rightarrow \quad 2115 \text{ 年 } 3 \text{ 月 } 9 \text{ 日}$$

ここに注意!

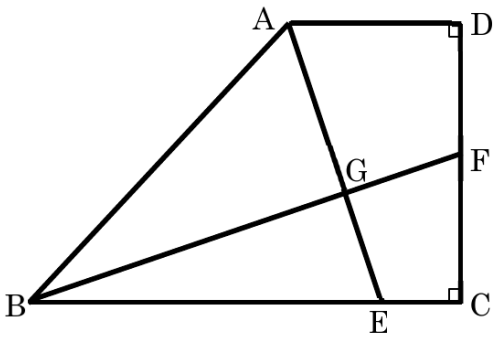
2100 年をうるう年に入れてしまうと、答えが 1 日ずれて「3 月 8 日」になってしまいます。問題文にわざわざ ② のルールが書いてあるのは、「2100 年をまたぐよ」という合図です。

ポイント

何万日も先の日付は、(1) 365 でわって「およそ何年後か」を出す → (2) その間にある 2 月 29 日の回数を数えて日数を直す → (3) 残りの日数を月日で進める、の 3 段階で求めます。うるう年の数は「植木算」で数え、100 の倍数の年にとくに注意します。

問題

(4) 下の図のような台形 ABCD において，辺 BC 上に点 E をとり，辺 CD の真ん中の点を F とし，直線 AE と BF が交わる点を G とします。三角形 ABE の面積が 8 cm^2，台形 AECD の面積が 6 cm^2 であるとき，BG : GF を答えなさい。



(4) 面積の比から長さの比を求める

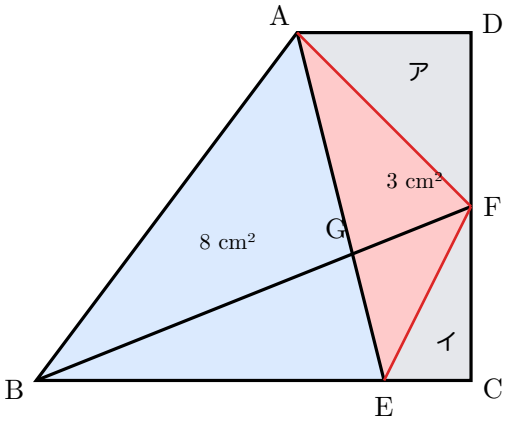
答え **8 : 3**

1 BG : GF は、長さがどこにも書いていないので、直接は求められません。そこで、**AE を底辺とする 2 つの三角形 ABE と AFE の面積の比**を使います。 三角形 ABG と三角形 AFG は、底辺を BG, GF と見ると高さが同じなので、面積の比は BG : GF です。三角形 EBG と三角形 EFG も同じです。合わせると、

> 三角形 ABE : 三角形 AFE = BG : GF

となります。三角形 ABE は 8 cm^2 と分かっているので、三角形 AFE の面積を求めれば解けます。

2 F と A、F と E を結びます。三角形 AFE は、台形 AECD から、三角形 ADF と三角形 ECF を取りのぞいた形です。



三角形 AFE(赤)= 台形 AECD −(三角形 ADF + 三角形 ECF)

3 F は CD の真ん中の点なので、DF と CF はどちらも CD の半分です。三角形 ADF(ア)は「底辺 AD、高さ DF」、三角形 ECF(イ)は「底辺 EC、高さ CF」なので、

> ア $+$ イ $=$ (AD $+$ EC) $\times$ (CD の半分) $\div 2$

いっぽう、台形 AECD の面積は $(\mathrm{AD}+\mathrm{EC})\times \mathrm{CD}\div 2=6\ (\mathrm{cm}^2)$ です。くらべると、高さが半分になっているだけなので、

> ア $+$ イ $=6\div 2=3\ (\mathrm{cm}^2)$

4 三角形 AFE の面積は $6-3=3\ (\mathrm{cm}^2)$。したがって、

> BG : GF $=$ 三角形 ABE : 三角形 AFE $=8:3$

ポイント

交わった 2 本の線で「長さの比」を聞かれたら、**もう一方の線を底辺とする 2 つの三角形の面積の比**に言いかえます(ここでは AE を底辺とする三角形 ABE と AFE)。台形の中で「辺の真ん中の点」と向かいの辺の両はしを結ぶと、面積が台形のちょうど半分になることも覚えておきましょう。

3 速さ(流水算・ダイヤグラム)

問題

3 花子さんと豊子さんは，それぞれのボートで，一定の速さで流れる川の 12km 離(はな)れた下流の A 地点と上流の B 地点の間を移動します。花子さんは A 地点を出発して 40 分後に B 地点に到着し，B 地点に 25 分間とまった後，A 地点に向かい，30 分後に A 地点に到着します。そして，A 地点に 25 分間とまった後，また B 地点に向かって出発します。
豊子さんは，A 地点を出発して B 地点に着くとすぐに A 地点に向かいます。花子さんが最初に A 地点を出発した 35 分後に，豊子さんが A 地点を出発したところ，豊子さんが B 地点に初めて着くのと同時に，花子さんは A 地点に初めて着きました。静水での 2 せきのボートの速さはそれぞれ一定であるとき，次の各問いに答えなさい。

問題

(1) 豊子さんのボートの静水での速さは毎分何 m ですか。

(1) 川の流れの速さを先に求める

答え **毎分 250 m**

1. A が下流、B が上流なので、A → B は「上り」、B → A は「下り」です。まず、くわしく書いてある花子さんの速さから調べます。12 km = 12000 m です。

   上り:$12000 \div 40 = 300$ (m/分)　　下り:$12000 \div 30 = 400$ (m/分)

2. 上りの速さは「静水での速さ − 川の流れ」、下りの速さは「静水での速さ + 川の流れ」です。上りと下りの差 $400 - 300 = 100$ は、川の流れ 2 つ分なので、

   川の流れの速さ $= (400 - 300) \div 2 = 50$ (m/分)

   川の流れは 2 人に共通なので、豊子さんにも使えます。

3. 花子さんが A 地点に初めて着くのは、出発から $40 + 25 + 30 = 95$ (分後) です。豊子さんは 35 分後に A を出発し、同じ 95 分後に B に着いたので、上りにかかった時間は $95 - 35 = 60$ (分)。

   豊子さんの上りの速さ $= 12000 \div 60 = 200$ (m/分)

4. 上りの速さは川の流れの分だけおそくなっているので、静水での速さは

   $$200 + 50 = 250 \text{ (m/分)}$$

ポイント

流水算は「上りの速さ」「下りの速さ」「静水での速さ」「川の流れの速さ」の 4 つを整理します。**川の流れの速さ = (下り − 上り) ÷ 2**。2 人(2 せきの船)が出てきても川の流れは共通なので、情報の多い人から先に川の流れを求めて、もう 1 人に使います。

問題

(2) 2 人のボートが 2 回目にすれ違うのは A 地点から何 m のところですか。

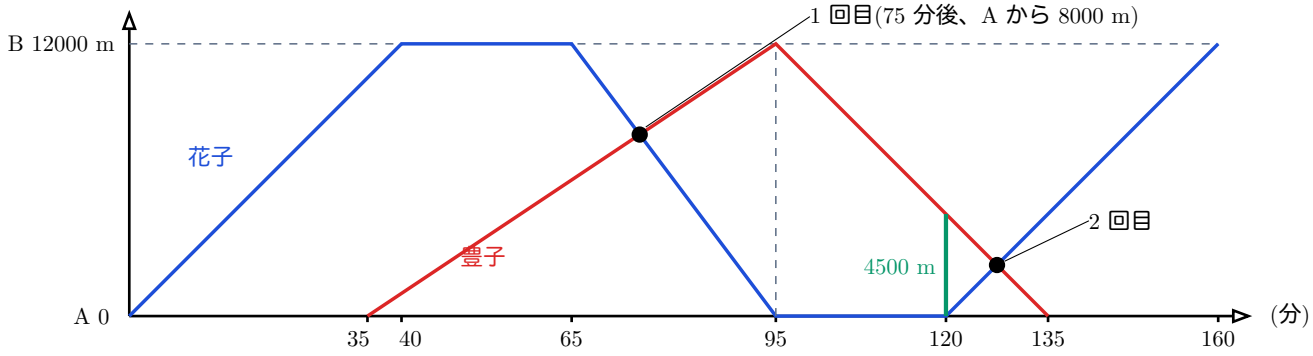
(2) ダイヤグラムで 2 回目のすれちがいをさがす

答え **2250 m**

1 2 人の動きを、時間ごとに整理します。豊子さんの下りの速さは $250+50=300$ (m/分) なので、B から A まで $12000\div300=40$ (分) かかります。

> 花子:0〜40 分 上り → 40〜65 分 B で休み → 65〜95 分 下り → 95〜120 分 A で休み → 120 分〜上り
> 豊子:35〜95 分 上り → 95〜135 分 下り → …

これをダイヤグラム(横が時間、たてが A からの道のり)にかくと、すれちがう場所が分かります。



ダイヤグラム(青:花子さん、赤:豊子さん)。線が交わるところがすれちがい

2 1 回目のすれちがいは、花子さんが下り(65〜95 分)、豊子さんが上りのときです(図の 75 分後)。そのあと 95 分後に、花子さんは A、豊子さんは B にいます。

3 2 回目は、豊子さんが B から下ってきて、花子さんが A から上っていくときです。花子さんが A を出発する 120 分後に、豊子さんがどこにいるかを調べます。豊子さんは 95 分後に B を出て、$120-95=25$ (分) 下っているので、

$$300\times25=7500\ (\mathrm{m}) \qquad 12000-7500=4500\ (\mathrm{m})$$

つまり 120 分後、2 人の間は 4500 m はなれています(豊子さんはまだ A に着いていないので、花子さんが休んでいる間にはすれちがいません)。

4 ここからは向かい合って進む「出会い算」です。花子さんの上りは 300 m/分、豊子さんの下りは 300 m/分なので、1 分間に $300+300=600$ (m) ずつ近づきます。

$$4500\div600=7.5\ (\text{分})$$

花子さんは A から 7.5 分上ったところですれちがうので、A 地点から

$$300\times7.5=2250\ (\mathrm{m})$$

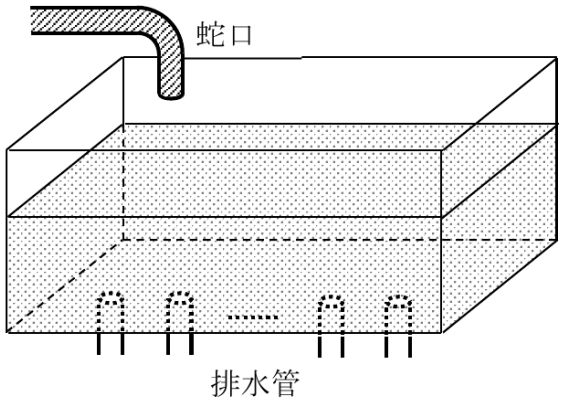
ポイント

往復したり休んだりする速さの問題は、まず「何分後にどこにいるか」を整理してダイヤグラムをかきます。すれちがいは、「**2 人とも動いている状態になった時点**での 2 人の間の道のり ÷ 速さの和」で求めます。

4 ニュートン算

問題

4 下の図のように, はじめに何 L かの水が入っている水そうがあり, 毎分 10L ずつ水が入る蛇口と何本かの排水管がついています。排水管 6 本と蛇口を同時に開いたときは, 280 分で水そうが空になります。排水管 7 本と蛇口を同時に開いたときは, 224 分で水そうが空になります。どの排水管も排水する水の量は同じであるとき, 次の各問いに答えなさい。



問題

(1) 1 本の排水管は 1 分間あたり何 L の水を排水することができますか。

(1) 時間の比から、へる速さの比へ

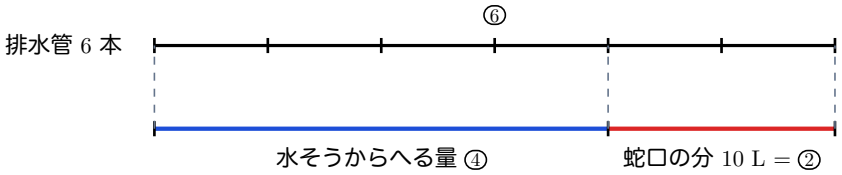
答え **5 L**

1 蛇口から水が入りながら、排水管から水が出ていきます。水そうの水は、1 分あたり「**排水する量 − 入る量(10 L)**」ずつへっていきます。

2 はじめの水の量は同じなので、空になるまでの時間の比と、1 分あたりにへる量の比は逆比になります。

> 時間の比　6 本 : 7 本 = 280 : 224 = 5 : 4
> 1 分あたりにへる量の比　6 本 : 7 本 = ④ : ⑤

3 6 本のときと 7 本のときのちがいは、排水管 1 本分だけです。だから、差の ⑤ − ④ = ① が **排水管 1 本が 1 分間に排水する量**です。



線分図:排水管 6 本分(⑥)から蛇口の 10L をひいた残りが④

4 排水管 6 本が排水する量は ⑥ です。ここから蛇口の 10 L をひいたものが、へる量 ④ なので、

> ⑥ − ④ = ② = 10 L　　① = 10 ÷ 2 = 5 (L)

5 たしかめ:6 本のとき、1 分に $5 \times 6 - 10 = 20$ (L) へるので、はじめの水は $20 \times 280 = 5600$ (L)。7 本のとき、1 分に $5 \times 7 - 10 = 25$ (L) へるので $25 \times 224 = 5600$ (L)。同じになりました。**はじめの水は 5600 L です。**

ポイント

ニュートン算は「へる量 = 出る量 − 入る量」。はじめの量が同じなら、**時間の比の逆比が、1 分あたりにへる量の比**です。その差が「排水管(ポンプ・窓口)何本分か」を考えると、① の正体が分かります。

問題

(2) 次の □ に当てはまる数でもっとも小さい整数を答えなさい。
排水管 □ 本と蛇口を同時に開いたときは，1 時間以内に水そうが空になります。

(2) 60 分以内に空にするには

答え **21**

1 はじめの水は 5600 L でした。これを 60 分以内に空にするには、1 分あたりにへる量が

$$5600 \div 60 = 93.33\ldots \text{ (L)}$$

以上であればよいことになります。

2 へる量は「排水する量 − 10 L」なので、排水する量は 1 分あたり $93.33\ldots + 10 = 103.33\ldots$ (L) 以上必要です。排水管 1 本は 5 L なので、

$$103.33\ldots \div 5 = 20.66\ldots \text{ (本)}$$

20 本では足りないので、**21 本**必要です。

3 たしかめ:20 本だと 1 分に $5 \times 20 - 10 = 90$ (L) へり、60 分で $90 \times 60 = 5400$ (L)。5600 L に足りません。21 本だと 1 分に $5 \times 21 - 10 = 95$ (L) へり、60 分で $95 \times 60 = 5700$ (L)。5600 L より多いので、60 分以内に空になります。

ポイント

「〜以内になるもっとも小さい整数」の問題は、わり算の答えが小数になったら**切り上げ**ます。切り上げたあと、「1 つ少ない数ではだめ、その数なら OK」を両方たしかめると安心です。

問題

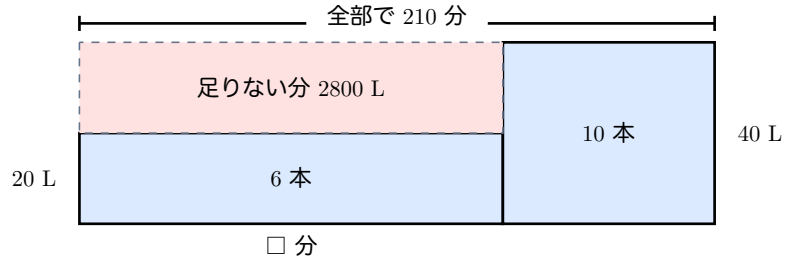
(3) 次の □ に当てはまる数を答えなさい。
排水管 6 本と蛇口を同時に開き，□ 分後にさらに 4 本排水管を開いたときは，210 分で水そうが空になります。

(3) とちゅうで本数がふえる → つるかめ算

答え **140**

1 はじめは排水管 6 本なので、1 分に $5 \times 6 - 10 = 20$ (L) ずつへります。とちゅうから 4 本ふえて 10 本になるので、1 分に $5 \times 10 - 10 = 40$ (L) ずつへります。

2 「1 分に 20 L へる時間」と「1 分に 40 L へる時間」が合わせて 210 分で、合計 5600 L へる、という**つるかめ算**です。面積図にかきます。



面積図:たて=1 分あたりにへる量、横=時間、面積=へった水の量(合計 5600L)

3 もし 210 分ずっと 10 本(1 分に 40 L)だったとすると、$40 \times 210 = 8400$ (L) へることになります。じっさいは 5600 L なので、$8400 - 5600 = 2800$ (L) 多すぎます。

4 6 本の時間が 1 分あるごとに、$40 - 20 = 20$ (L) ずつ少なくなるので、

$$2800 \div 20 = 140 \text{ (分)}$$

6 本だけで排水していた時間が 140 分なので、□ $=$ **140** です。

5 たしかめ:$20 \times 140 + 40 \times (210 - 140) = 2800 + 2800 = 5600$ (L)。合っています。

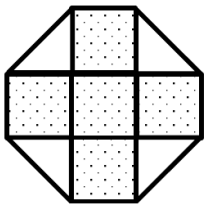
ポイント

とちゅうで速さ(へり方)が変わって、「合計の時間」と「合計の量」が分かっているときは、**つるかめ算**です。面積図をかいて、「全部が速い方だったら」と考えます。

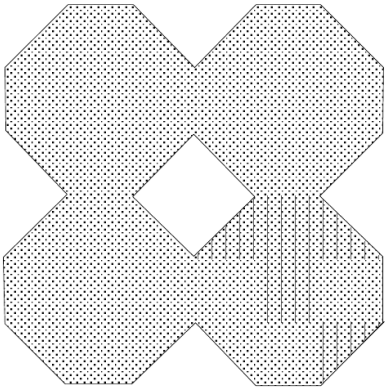
5 平面図形(図形をしきつめる・規則性)

問題

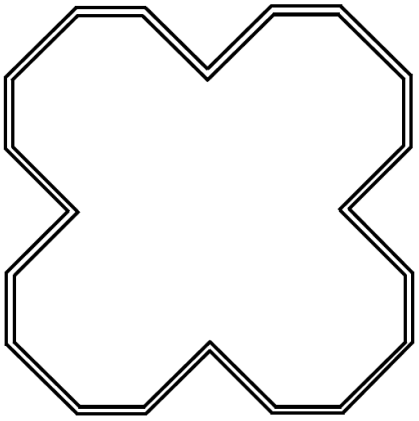
5 下の＜図 1＞は，1 辺の長さが 1 cm の正方形を 5 個並べ，頂点を結んでできた図形です。これを図形 A と呼ぶことにします。4 個の図形 A を 1 cm の辺どうしがくっつくように，縦と横にそれぞれ 2 個ずつ並べた状態を＜図 2＞とします。＜図 2＞の外側を木の板で囲い，辺がぴったりくっつくように作った木わくが＜図 3＞です。ただし，木わくの厚さは考えないものとします。



図形 A
＜図 1＞



図形 A を 4 個くっつけた状態
＜図 2＞



＜図 2＞がちょうど収まる木わく
＜図 3＞

問題

(1) ＜図 3＞の木わくの内部の面積は何 cm^2 ですか。

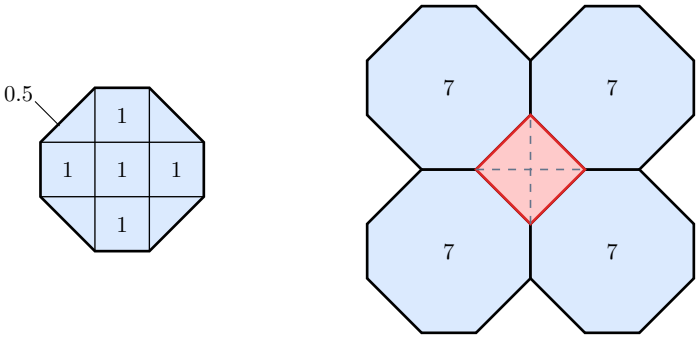
(1) 図形 A 4 個分 + まん中のすき間

答え **30 cm^2**

1 まず、図形 A 1 個の面積を求めます。図形 A は、1 辺 1 cm の正方形 5 個と、四すみの直角二等辺三角形 4 個でできています。三角形 1 個は $1 \times 1 \div 2 = 0.5$ (cm^2) なので、

$$1 \times 5 + 0.5 \times 4 = 7 \ (cm^2)$$

2 木わくの内部は、図形 A 4 個と、**まん中にできるすき間**を合わせた部分です。すき間は、4 つの図形 A のななめの辺に囲まれた正方形です。



左:図形 A(7cm^2) 右:図 2 のまん中のすき間(赤)は、四すみの三角形 4 個分

3 すき間の正方形に対角線を 2 本ひくと、直角をはさむ辺が 1 cm の直角二等辺三角形 4 個に分かれます(図形 A の四すみの三角形と同じ形)。だから、すき間の面積は

$$0.5 \times 4 = 2 \ (\text{cm}^2)$$

(対角線が 2 cm の正方形なので $2 \times 2 \div 2 = 2$ としても同じ)

4 木わくの内部の面積は、

$$7 \times 4 + 2 = 30 \ (\text{cm}^2)$$

ここに注意!

図形 A 4 個分の $7 \times 4 = 28 \ (\text{cm}^2)$ と答えてはいけません。木わくは外側をぐるりと囲むので、まん中のすき間も「内部」に入ります。

ポイント

図形をならべた全体の面積は「**図形の面積 × 個数 + すき間の面積 × すき間の個数**」。まず 1 個分の面積と、すき間 1 か所分の面積をていねいに求めておくと、(2)(3) は個数を数えるだけになります。

問題

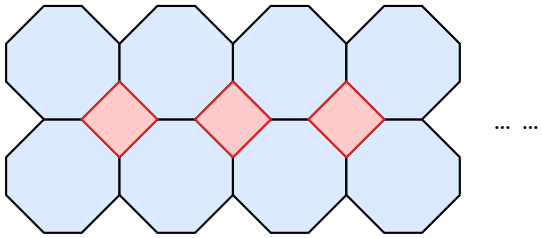
(2) 100 個の図形 A を 1cm の辺どうしがくっつくように，縦に 2 個，横に 50 個並べた状態で，外側の辺がぴったりくっつくような木わくを準備をします。木わくの内部の面積は何 cm^2 ですか。

(2) たて 2 個・横 50 個のとき、すき間は何個?

答え **798 cm^2**

1 ならべ方は (1) と同じ(1 cm の辺どうしをくっつける)なので、すき間 1 か所は (1) と同じ $2 \ \text{cm}^2$ の正方形です。あとは、すき間の数を数えます。

2 すき間は、図形 A が「たて 2 個 × 横 2 個」集まったまん中に 1 か所できます。たては 2 個なので、たて方向には 1 段だけ。横は 50 個ならんでいるので、となりどうしの間は $50-1=49$ (か所)。だから、すき間は **49 か所**です。



たて 2 個で横にのばしていくと、列と列の間に 1 つずつすき間ができる(横 4 個ならすき間 3 個)

3 木わくの内部の面積は、図形 A 100 個分とすき間 49 か所分なので、

$$7\times100+2\times49=700+98=798\ (\mathrm{cm}^2)$$

ポイント

「間の数 = ならんだ数 − 1」(植木算)です。横に 50 個なら間は 49。いきなり 50 個で考えず、横 2 個、3 個、4 個…と小さい場合でたしかめると、数えまちがいがなくなります。

問題

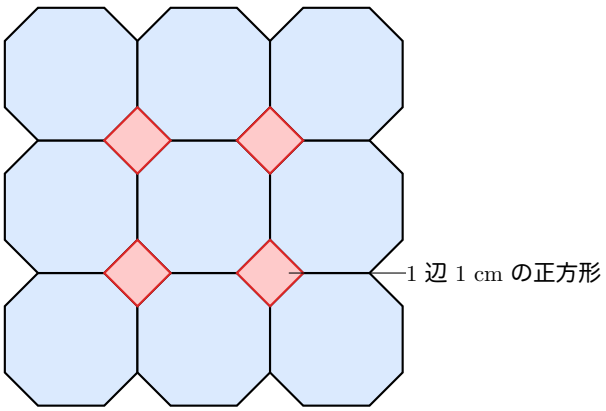
(3) 100 個の図形 A を 1cm でないほうの辺どうしがくっつくように，縦に 10 個，横に 10 個並べた状態で，外側の辺がぴったりくっつくような木わくを準備をします。木わくの内部の面積は何 cm^2 ですか。

(3) ななめの辺でくっつけると、すき間の形が変わる

答え **781 cm^2**

1 こんどは「1 cm でないほうの辺」、つまり**ななめの辺どうし**をくっつけます。すると、4 つの図形 A のまん中には、こんどは **1 cm の辺 4 本に囲まれたすき間**ができます。1 辺 1 cm の正方形なので、すき間 1 か所の面積は

$$1\times1=1\ (\mathrm{cm}^2)$$



ななめの辺でくっつけたようす(たて 3 個・横 3 個の例)。すき間(赤)は 1 辺 1cm の正方形で、2×2=4 か所

2 すき間の数を数えます。すき間は「たて 2 個 × 横 2 個」のまん中に 1 か所ずつできるので、たて方向に $10-1=9$ (段)、横方向に $10-1=9$ (列) で、

$$9\times 9=81\ (\text{か所})$$

(上の図のたて 3 個・横 3 個の例では $2\times 2=4$ か所になっています。)

3 木わくの内部の面積は、図形 A 100 個分とすき間 81 か所分なので、

$$7\times 100+1\times 81=781\ (\text{cm}^2)$$

ここに注意!

(2) と同じ「すき間 2 cm^2」を使ってはいけません。くっつける辺が変わると、すき間を囲む辺も変わります。(2) はななめの辺に囲まれた正方形(2 cm^2)、(3) は 1 cm の辺に囲まれた正方形(1 cm^2)です。

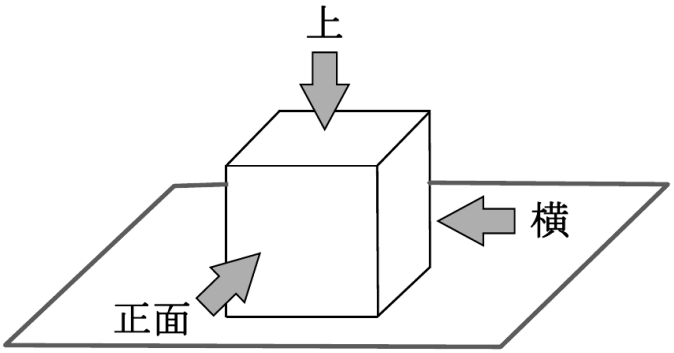
ポイント

大きな数(100 個)のしきつめは、かならず 2×2 や 3×3 の小さい図をかいて、「すき間の形」と「すき間の数のきまり」を見つけます。たて a 個・横 b 個なら、すき間は $(a-1)\times(b-1)$ か所です。

6 立体図形(投影図から立体を読み取る)

問題

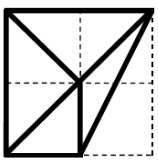
6 下の図のように，1 辺が 2 cm の立方体を，上から，正面から，横からの 3 つの方向から見た図を考えます。



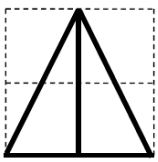
この立方体をある平面で切り，体積が小さいほうの立体を取りのぞきます。残った立体の，上から，正面から，横からの 3 つの方向から見た図をマス目が 1 cm の正方形の方眼紙にかきます。

問題

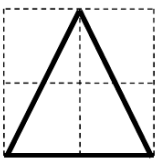
(1) 立方体をいくつかの平面で切った立体の，上から，正面から，横からの 3 つの方向から見た図は，次のようになりました。この立体の体積は何 cm^3 ですか。



上から見た図



正面から見た図



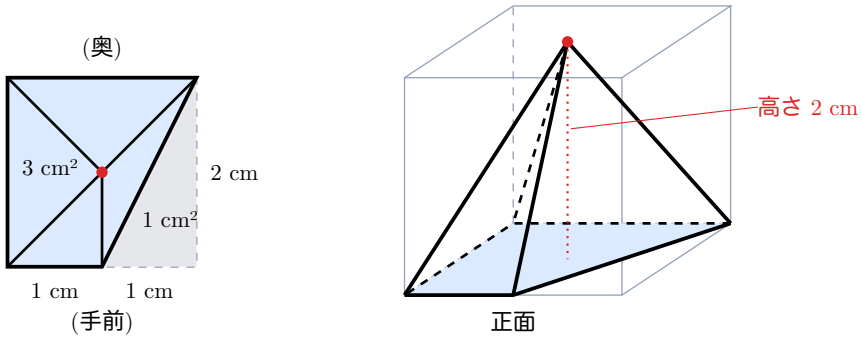
横から見た図

(1) 正面・横が三角形 → てっぺんがとがった「すい体」

答え **2 cm^3**

1 3 つの図から、立体の形を読み取ります。正面から見ても横から見ても、**上のまん中がとがった三角形**です。これは、立体がてっぺんの 1 点に向かってとがっている、つまり**「角すい」**の形であることを表しています。高さは、三角形の高さの 2 cm です。

2 上から見た図では、太い線の外わくが底面の形です。そして、まん中の点(てっぺんを真上から見た点)から底面の 4 つの角に向かって線がのびています。これが角すいのななめの辺です。底面が四角形なので、この立体は**四角すい**です。



左:上から見た図(底面は正方形から灰色の三角形を切り取った四角形) 右:立方体の中の四角すい

3 底面積を求めます。底面は、1 辺 2 cm の正方形から、右手前の直角三角形(底辺 1 cm、高さ 2 cm)を切り取った四角形です。

$$2 \times 2 - 1 \times 2 \div 2 = 4 - 1 = 3 \ (\mathrm{cm}^2)$$

4 角すいの体積は「底面積 × 高さ ÷ 3」なので、

$$3 \times 2 \div 3 = 2 \ (\mathrm{cm}^3)$$

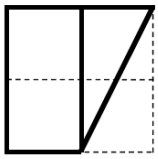
5 たしかめ:この四角すいを正面から見ると、てっぺんから底面の手前のまん中の角へ下りる辺が、まん中のたての線に見えます。横から見ると、どの辺も三角形の外わくに重なるので、中に線はありません。問題の図と合っています。

ポイント

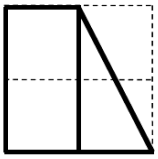
3 方向から見た図(投影図)では、**上から見た図の外わくが「底面の形」**、正面・横から見た図が「高さの変わり方」を表します。正面も横も三角形なら角すいです。上から見た図の中の線は「辺」なので、どの点とどの点が結ばれているかを読み取りましょう。

問題

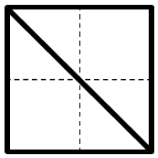
(2)　立方体をいくつかの平面で切った立体の，上から，正面から，横からの 3 つの方向から見た図は，次のようになりました。この立体の体積は何 cm^3 ですか。



上から見た図



正面から見た図



横から見た図

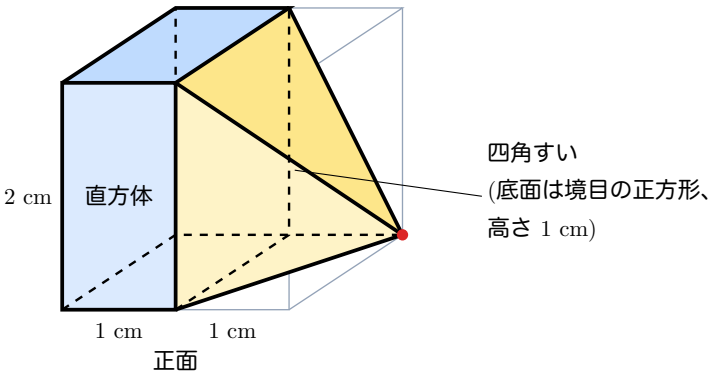
(2)　直方体と四角すいに分ける

答え　$5\frac{1}{3}\ \mathrm{cm}^3$

1. 上から見た図と正面から見た図には、どちらもまん中にたての線があります。そこで、立体を**左半分と右半分に分けて**考えます。
2. **左半分**:上から見ても、正面から見ても、切られていない長方形($1\ \mathrm{cm} \times 2\ \mathrm{cm}$)です。横から見た図も外わくは正方形のままなので、左半分は切られずに残っています。たて $2\ \mathrm{cm}$・横 $1\ \mathrm{cm}$・高さ $2\ \mathrm{cm}$ の直方体なので、

$$1 \times 2 \times 2 = 4\ (\mathrm{cm}^3)$$

3. **右半分**:上から見ると、右へいくほど細くなって、右奥の角でとがっています。正面から見ると、右へいくほど低くなって、右はしで高さ 0 になっています。つまり右半分は、左半分との境目(さかいめ)の正方形($2\ \mathrm{cm} \times 2\ \mathrm{cm}$)を底面として、**右奥の下の角の 1 点に向かってとがる四角すい**です。



立方体の中に残る立体:左の直方体(青)+ 右の四角すい(黄)。赤い点がとがった先

4. この四角すいの底面は 1 辺 $2\ \mathrm{cm}$ の正方形、高さは、境目からとがった先までの横のきょり $1\ \mathrm{cm}$ です。

$$2 \times 2 \times 1 \div 3 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

5. 合わせて、

$$4 + 1\frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

6 たしかめ:横(右)から見ると、外わくは左半分の直方体の正方形です。そして、四角すいの「境目の正方形の手前の上の角」から「右奥の下のとがった先」へ向かう辺が、左上から右下へのななめの線に見えます。問題の「横から見た図」と合っています。

ポイント

投影図の中に、図を 2 つに分ける線があったら、そこで立体を分けて考えます。「切られていない部分(直方体)」と「1 点に向かってとがる部分(角すい)」に分ければ、体積は公式で求められます。角すいの高さは、たて方向とはかぎりません。**底面からとがった先までのきょり**が高さです。