# 2021 年度 豊島岡女子学園中学校

## 第 3 回 算数 解答解説

### ■ 解答一覧

| 大問 | 小問 | 答え |
|---|---|---|
| 1 | (1) | $\frac{1}{247}$ |
| 1 | (2) | 6 |
| 1 | (3) | 11121 |
| 1 | (4) | 82 人 |
| 2 | (1) | 5.4% |
| 2 | (2) | 44 歳 |
| 2 | (3) | 20 |
| 2 | (4) | 4 : 1 |
| 3 | (1) | 300L |
| 3 | (2) | 14 分間 |
| 4 | (1) | 582 |
| 4 | (2) | 626 |
| 5 | (1) | 108cm |
| 5 | (2) | 36cm |
| 5 | (3) | 63 秒後 |
| 6 | (1) | $288cm^3$ |
| 6 | (2) | $216cm^3$ |
| 6 | (3) | $54cm^3$ |

# 1 計算・小問集合

問題

(1) $1 \div \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{11}{13}$ を計算しなさい。

## (1) 分数の計算

**答え** $\frac{1}{247}$

1. まず、かっこの中をたします。分母の $2, 3, 5, 7$ はどれも共通の約数がないので、通分するときの分母は $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ です。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{105}{210}+\frac{70}{210}+\frac{42}{210}+\frac{30}{210}=\frac{247}{210}$$

2. 「$1 \div$ 分数」は、分数をひっくり返す(逆数にする)だけなので、$1 \div \frac{247}{210} = \frac{210}{247}$ です。

3. 次に $\frac{11}{13}$ をひきます。ここで $247 = 13 \times 19$ と気づくと、通分がかんたんです。$\frac{11}{13}$ の分母と分子に $19$ をかけます。

$$\frac{210}{247}-\frac{11}{13}=\frac{210}{247}-\frac{11 \times 19}{13 \times 19}=\frac{210}{247}-\frac{209}{247}=\frac{1}{247}$$

**ポイント**

あとから出てくる分母(ここでは $13$)は、「前の分母の約数になっていないかな?」と疑ってわってみましょう。$247 \div 13 = 19$ とわり切れれば、通分がとても楽になります。

問題

(2) 48 から 62 までのすべての整数の和を 7 で割った余りはいくつになりますか。ただし，割り切れる場合は 0 と答えなさい。

## (2) 連続する整数の和とあまり

**答え** 6

1. $48$ から $62$ までの整数は、$62 - 48 + 1 = 15$ 個あります(両はしを数えるので $+1$ を忘れずに)。

2. 連続する整数の和は「まん中の数 $\times$ 個数」で求められます。まん中の数は $(48 + 62) \div 2 = 55$ なので、和は $55 \times 15 = 825$ です。

3. $825 \div 7 = 117$ あまり $6$ なので、あまりは $6$ です。

**別の解き方**

あまりだけを使っても求められます。$55 \div 7 = 7$ あまり $6$、$15 \div 7 = 2$ あまり $1$ なので、$55 \times 15$ を $7$ でわったあまりは、あまりどうしをかけた $6 \times 1 = 6$ と同じになります。

**ポイント**

連続する整数(等差数列)の和は「まん中の数 × 個数」。個数が奇数個のときは、まん中の数がそのまま平均になるので特に使いやすいです。

問題

(3) 数字の 1 と 2 だけを使って整数を作り，小さい方から順に

1，2，11，12，21，22，111，…

のように並べます。小さい方から 33 番目の整数を答えなさい。

## (3) 1 と 2 だけでできる整数

答え **11121**

1. けた数ごとに何個あるかを調べます。どの位も「1 か 2」の 2 通りなので、
   > 1 けた … 2 個　2 けた … $2\times2=4$ 個　3 けた … $2\times2\times2=8$ 個　4 けた … 16 個
2. 4 けたまでで $2+4+8+16=30$ 個あります。だから 33 番目は、5 けたの数の小さい方から $33-30=3$ 番目です。
3. 5 けたの数を小さい順に書くと、11111, 11112, **11121**, … となるので、3 番目は 11121 です。

**ここに注意!**

11112 の次を 11113 や 11122 としないように。使える数字は 1 と 2 だけで、11112 の次に小さいのは 11121 です。

**ポイント**

「◯番目の数」は、けた数ごと(グループごと)の個数を調べて、どのグループの何番目かをしぼりこみます。

問題

(4) ある中学校の 1 年生の人数は 200 人以上 250 人以下です。1 年生のうち通学に電車を利用しない生徒の割合は 1 年生全体の $\frac{1}{3}$，通学に電車とバスの両方を利用する生徒の割合は 1 年生全体の $\frac{5}{11}$，両方とも利用しない生徒の割合は 1 年生全体の $\frac{1}{7}$ です。通学にバスを利用しない生徒は何人ですか。

## (4) 人数を決めてから表で整理

答え **82 人**

1. 人数は必ず整数です。全体の $\frac{1}{3}$、$\frac{5}{11}$、$\frac{1}{7}$ がすべて整数になるので、全体の人数は 3 でも 11 でも 7 でもわり切れる数、つまり $3\times11\times7=231$ の倍数です。200 人以上 250 人以下なので、1 年生は **231 人** と決まります。

**2** それぞれの人数を出します。

> 電車を利用しない … $231 \times \frac{1}{3} = 77$ 人　→ 電車を利用する … $231 - 77 = 154$ 人
> 電車とバスの両方を利用する … $231 \times \frac{5}{11} = 105$ 人
> 両方とも利用しない … $231 \times \frac{1}{7} = 33$ 人

**3** 表に整理します。知りたいのは「バスを利用しない」の合計(表の赤いところ)です。

| | バスを利用する | バスを利用しない | 合計 |
|---|---|---|---|
| 電車を利用する | 105 | ア | 154 |
| 電車を利用しない | | 33 | 77 |
| 合計 | | ? | 231 |

ア(電車だけ利用する人)は $154 - 105 = 49$ 人です。

**4** バスを利用しない人は、「電車だけ利用する人」と「両方とも利用しない人」の合計なので、$49 + 33 = 82$ 人です。

**ポイント**

分数の割合がいくつも出てきて人数の範囲が与えられたら、「人数は整数」→ 分母の最小公倍数の倍数、で全体の人数を決めます。そのあとは「する・しない」の表(またはベン図)で整理しましょう。

## 2　小問集合(食塩水・年齢算・数の性質・平面図形)

問題

(1)　ある濃度の食塩水 A と 6%の食塩水 B があります。水が 100g 入った容器に食塩水 A，B をそれぞれ 100g ずつ入れてよくかき混ぜると 3.8%の食塩水になりました。食塩水 A の濃度は何%ですか。

### (1)　食塩の重さで考える

**答え**　**5.4%**

1. まぜたあとの食塩水は、水 100g + A 100g + B 100g で全部で 300g です。濃度が 3.8% なので、とけている食塩は $300 \times 0.038 = 11.4$ g です。
2. 水には食塩が入っていません。B(6%、100g)には食塩が $100 \times 0.06 = 6$ g 入っています。だから、残りの $11.4 - 6 = 5.4$ g は A に入っていた食塩です。
3. A は 100g の中に食塩が 5.4g なので、濃度は $5.4 \div 100 \times 100 = 5.4$ (%) です。

**ポイント**

3 つ以上のものをまぜる食塩水の問題は、面積図よりも「食塩の重さの合計」で考えるほうが速いです。水は「0% の食塩水」と考えます。

問題

(2)　4 歳だけ年の離れた兄弟とその父親がいます。今からちょうど 1 年後，父親の年齢は弟の年齢の 3 倍になります。また，今からちょうど 8 年後，父親の年齢は兄の年齢の 2 倍になります。父親の今の年齢は何歳ですか。

### (2)　年齢算(①でそろえる)

**答え**　**44 歳**

1. 「1 年後」に父が弟の 3 倍になるので、1 年後の弟の年齢を ①、父の年齢を ③ とします。兄は弟より 4 歳上なので、1 年後の兄は ① + 4 (歳)です。
2. 「8 年後」は、1 年後からさらに 7 年たったときです。3 人とも 7 歳ずつ年をとるので、
   > 8 年後の父 … ③ + 7 (歳)
   > 8 年後の兄 … ① + 4 + 7 = ① + 11 (歳)
3. 8 年後、父は兄の 2 倍です。兄の 2 倍は (① + 11) × 2 = ② + 22 (歳) なので、
   > ③ + 7 = ② + 22　　→　① = 22 − 7 = 15 (歳)

   両方から ② を取りのぞくと、① が 15 歳と分かります。
4. 1 年後の父は ③ = 15 × 3 = 45 歳なので、今の父は 45 − 1 = 44 歳です。
   (たしかめ:今は弟 14 歳・兄 18 歳・父 44 歳。8 年後は兄 26 歳・父 52 歳で、ちょうど 2 倍になっています。)

**ポイント**

年齢算は「倍」が出てくる時点の年齢を ① とおき、別の時点は「全員同じだけ年をとる」ことを使って ① の式で表します。最後に「今」にもどすのを忘れずに。

問題

(3) 異なる 4 つの整数があり，それらを小さい順に A，B，C，D とします。この 4 つの整数について，2 つずつの整数の和 A＋B，A＋C，A＋D，B＋C，B＋D，C＋D を計算したところ，これらのうちの 2 つが等しくなり，47，55，62，69，77 の 5 種類の数になりました。このとき，A は □ になります。□ にあてはまる整数を答えなさい。

## (3) 2 つずつの和の大小をならべる

**答え** **20**

1. A < B < C < D なので、6 つの和の大小を考えます。いちばん小さいのは A+B、2 番目は A+C です。いちばん大きいのは C+D、2 番目に大きいのは B+D です。

   > A+B < A+C < ( A+D と B+C ) < B+D < C+D

   残った A+D と B+C は、どちらが大きいか決まりません。

2. 和は 5 種類しかないので、どれか 2 つが等しくなっています。上の大小関係から、等しくなれるのは A+D と B+C だけです。そこで、小さい順にあてはめると、

   > A+B = 47、 A+C = 55、 A+D = B+C = 62、 B+D = 69、 C+D = 77

3. A+B = 47、A+C = 55、B+C = 62 を全部たすと、A, B, C が 2 回ずつ出てくるので、

   > $(A+B+C)\times 2 = 47+55+62 = 164 \quad \rightarrow \quad A+B+C = 82$

4. A+B+C = 82 から B+C = 62 をひくと、A = 82 − 62 = 20 です。
   (たしかめ:B = 27、C = 35、D = 42 となり、A+D = 62、B+D = 69、C+D = 77 で全部合っています。)

**ポイント**

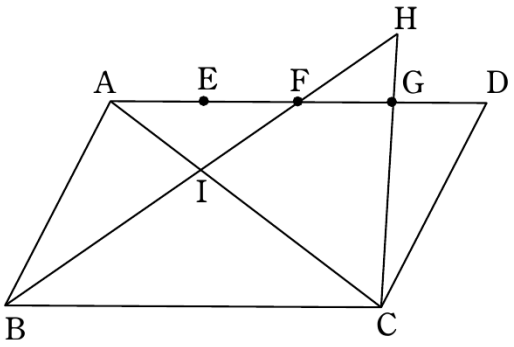
「2 つずつの和」が与えられたら、まず和を小さい順にならべて、どの和がどの組かを決めます。A+B, A+C, B+C のように輪になった 3 つの和は、全部たして 2 でわると 3 つの合計が出ます。

問題

(4) 下の図のように，平行四辺形 ABCD があり，3 つの点 E，F，G は辺 AD を 4 等分する点です。直線 BF と直線 CG の交わる点を H，直線 BF と直線 AC の交わる点を I とするとき，

（三角形 ABI の面積）：（三角形 HFG の面積）

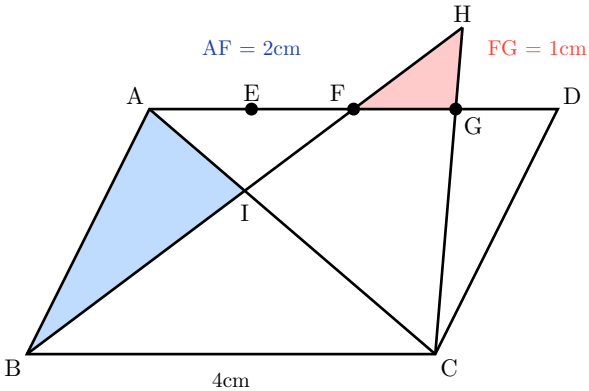
を答えなさい。




## (4) 相似を 2 つ見つける

**答え** **4 : 1**

**1** 長さが書かれていないので、計算しやすい数を自分で決めます。AD を 4 等分しているので AD = BC = 4cm、平行四辺形の高さを 3cm とします。すると AF = 2cm、FG = 1cm で、平行四辺形の面積は $4 \times 3 = 12$ $(\text{cm}^2)$ です。




青:三角形 AIF と三角形 CIB(ちょうちょ形) 赤:三角形 HFG と三角形 HBC(ピラミッド形)

**2** **三角形 ABI** を求めます。AD と BC は平行なので、三角形 AIF と三角形 CIB は同じ形(相似)で、辺の比は AF : CB = 2 : 4 = 1 : 2 です。だから AI : IC = 1 : 2 です。

三角形 ABC は平行四辺形の半分で $12 \div 2 = 6$ $(\text{cm}^2)$。三角形 ABI は、これを AC の上で 1 : 2 に分けたうちの「1」のほうなので、

$$6 \times \frac{1}{1+2} = 2 \ (\text{cm}^2)$$

3 **三角形 HFG** を求めます。FG と BC は平行なので、三角形 HFG と三角形 HBC は同じ形で、辺の比は $\mathrm{FG}:\mathrm{BC}=1:4$ です。高さの比も $1:4$ なので、その差の「3」が平行四辺形の高さ $3\mathrm{cm}$ にあたります。だから三角形 HFG の高さは $1\mathrm{cm}$ です。

$$1\times 1\div 2=0.5\ (\mathrm{cm}^2)$$

4 面積の比は $2:0.5=4:1$ です。

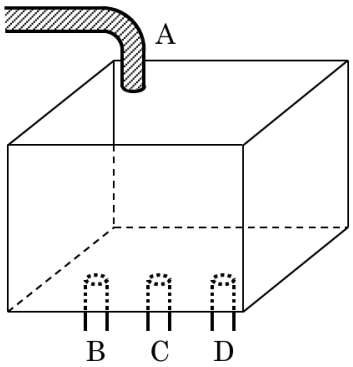
**ポイント**

平行線があったら「ちょうちょ形」と「ピラミッド形」の相似をさがします。長さが $1$ つも与えられていない面積比の問題では、等分の数に合わせて、底辺や高さを計算しやすい数に自分で決めてしまうと楽です。

## 3　水そうと管(仕事算・つるかめ算)

問題

3　下の図のように，ある水そうに 4 つの管 A，B，C，D がついています。A からは毎分 3L で水を入れます。B からは毎分 6L で水を抜き，C からは毎分 2L で水を抜き，D からは一定の割合で水を抜きます。この水そうが満水の状態から，A と D を同時に開くと 2 時間 30 分で水そうは空になり，A と C と D を同時に開くと 1 時間 15 分で水そうは空になります。このとき，次の各問いに答えなさい。




(1)　この水そうの容積は何 L ですか。

(2)　この水そうが満水の状態から，A と B と D を同時に開き，しばらくして B を閉じました。その 10 分後，A を閉じると同時に C を開き，C と D だけで水を抜きました。A と B と D を同時に開いてから 48 分で水そうが空になったとすると，B を開いていた時間は何分間ですか。

### (1)　時間の比から、へる速さの比へ

**答え**　**300L**

1　2 つの空にし方をくらべます。A は水を入れ、C と D は水をぬくことに注意します。

> A と D を開く　　… 2 時間 30 分 = 150 分で空
> A と C と D を開く … 1 時間 15 分 = 75 分で空

同じ量(満水)の水をなくすのに、かかる時間の比は $150 : 75 = 2 : 1$ です。

2　同じ量をへらすとき、「1 分間にへる量」の比は時間の比の逆になります。だから、

> (A と D で 1 分間にへる量) : (A と C と D で 1 分間にへる量) = ① : ②

3　この 2 つのちがいは「C を開けたかどうか」だけです。C は毎分 2L ぬくので、差の ② − ① = ① が 2L にあたります。つまり、A と D を開くと 1 分間に 2L ずつへります。

4　毎分 2L ずつへって 150 分で空になるので、容積は $2 \times 150 = 300$ (L) です。
(たしかめ:A と C と D なら毎分 $2 + 2 = 4$ L へるので、$300 \div 4 = 75$ 分。合っています。)

5 (2)のために D の強さも出しておきます。A が毎分 3L 入れているのに、全体では毎分 2L へるのだから、D は毎分 $3+2=5$ L ぬいています。

**ポイント**

同じ量の水を出し入れするとき、「時間の比」と「1 分あたりの量の比」は逆比。2 つの場合のちがい(ここでは管 C の毎分 2L)が、比の差にあたります。

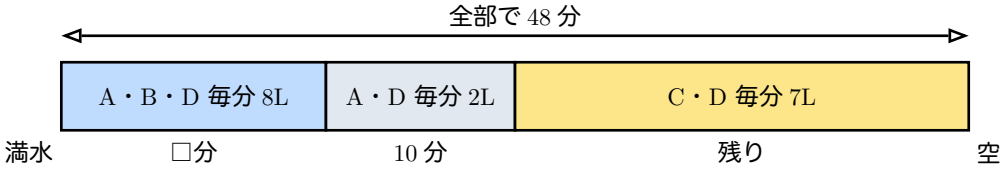
## (2) 3 つの段階に分けて、つるかめ算

**答え** 14 分間

1 まず、開いている管の組み合わせごとに、1 分間に水がどれだけへるかを調べます(A は +3、B は −6、C は −2、D は −5)。

| 段階 | 開いている管 | 1 分間にへる量 | 時間 |
|---|---|---|---|
| 1 | A・B・D | $6+5-3=8$ L | □分(求めるもの) |
| 2 | A・D | $5-3=2$ L | 10 分 |
| 3 | C・D | $2+5=7$ L | 残りの時間 |

2 時間の流れを図にします。全部で 48 分、段階 2 は 10 分と決まっているので、段階 1 と段階 3 を合わせて $48-10=38$ 分です。




満水(300L)から空になるまでの 48 分間

3 段階 2 でへる水は $2\times10=20$ L です。だから、段階 1 と段階 3 でへらす水は合わせて $300-20=280$ L です。

4 「毎分 8L と毎分 7L を合わせて 38 分で 280L」なので、つるかめ算です。もし 38 分ずっと毎分 7L(段階 3)だったとすると、$7\times38=266$ L しかへりません。実際との差は $280-266=14$ L です。

5 1 分を段階 3 から段階 1 に取りかえるごとに、へる量は $8-7=1$ L ずつふえます。だから段階 1 は $14\div1=14$ 分。B を開いていたのは段階 1 だけなので、答えは 14 分間です。

(たしかめ:$8\times14+2\times10+7\times24=112+20+168=300$ L。合っています。)

**ここに注意!**

A は「入れる」管です。A が開いている間は、ぬく量から 3L をひくのを忘れないようにしましょう。

**ポイント**

管の開け閉めが切りかわる問題は、①段階ごとに「1 分あたりの増減」を表にまとめ、②時間が分かっている段階を先に計算して取りのぞき、③残りの 2 段階をつるかめ算で解きます。

## 4 規則性(数表・平方数)

問題

4 下の図のように，ある規則にしたがって整数がマスの中に 1 つずつ書かれています。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 行→ | 1 | 2 | 9 | 10 | 25 | 26 | ・ |
| | 4 | 3 | 8 | 11 | 24 | 27 | ・ |
| | 5 | 6 | 7 | 12 | 23 | 28 | ・ |
| | 16 | 15 | 14 | 13 | 22 | 29 | ・ |
| | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 30 | ・ |
| | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | ・ |
| | 37 | ・ | ・ | ・ | ・ | ・ | ・ |
| | | | | | | | |

第 1 行の数を 1 つ選び A とします。
A の 1 つ右のマスに書かれた数を B とし，A の 1 つ下のマスに書かれた数を C とし，C の 1 つ右のマスに書かれた数を D として，4 つの数 A，B，C，D の和を X とします。例えば，A＝9 のときは X＝9＋10＋8＋11＝38 であり，A＝10 のときは X＝10＋25＋11＋24＝70 です。
このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) A＝122 のとき，X はいくつですか。

(2) X＝2710 のとき，A はいくつですか。

## (1) 表のきまりを見つける

**答え** **582**

1 表の数がどう進んでいるかを調べます。目印になるのは、同じ数を 2 回かけた数(平方数)です。

| 1 列 | 2 列 | 3 列 | 4 列 | 5 列 | 6 列 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 9 | 10 | 25 | 26 |
| 4 | 3 | 8 | 11 | 24 | 27 |
| 5 | 6 | 7 | 12 | 23 | 28 |
| 16 | 15 | 14 | 13 | 22 | 29 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 30 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |

赤:奇数×奇数は第 1 行に 青:偶数×偶数は左はしの列に

- 第 1 行の奇数番目の列には、1 列目に $1 \times 1 = 1$、3 列目に $3 \times 3 = 9$、5 列目に $5 \times 5 = 25$ が入っています。
- そこから右へ 1 つ進み(10)、下へおりて(11, 12, 13)、左はしまでもどる(14, 15, 16)と、$4 \times 4 = 16$ になります。
- 次は 1 つ下へ進み(17)、右へ行って(18〜21)、上へのぼる(22, 23, 24)と、第 1 行の $5 \times 5 = 25$ に着きます。

2 122 がどこにあるかを考えます。$11 \times 11 = 121$ で、11 は奇数なので、121 は第 1 行の 11 列目にあります。122 はその次の数なので、1 つ右の **第 1 行・12 列目** にあります。これが A です。

3 C(A の 1 つ下):$121 \to 122$ と右に進んだあとは下へおりるので、$C = 123$ です。

4 B(A の 1 つ右):第 1 行の 13 列目なので、$B = 13 \times 13 = 169$ です。

5 D(B の 1 つ下):13 列目は下から上へのぼってきて、いちばん上が 169 でした。だから 1 つ下は 1 つ前の数で、$D = 168$ です。

| | 12 列目 | 13 列目 |
|---|---|---|
| 第 1 行 | $A = 122$ | $B = 169$ |
| 第 2 行 | $C = 123$ | $D = 168$ |

6 $X = 122 + 169 + 123 + 168 = 582$ です。
(例でたしかめ:$A = 10$ のとき、$10 + 11$ と $25 + 24$ で 70。同じしくみになっています。)

**ポイント**

うずまきのように進む数表は、「平方数がどこにならぶか」をまず見つけます。この表では、奇数 × 奇数が第 1 行、偶数 × 偶数が左はしの列。あとは、そこからどちら向きに 1 ずつ進むかを考えます。

## (2) A が奇数列か偶数列かで場合分け

**答え** **626**

**1** A が第 1 行の「奇数番目の列」にあるときと「偶数番目の列」にあるときで、4 つの数のならび方がちがいます。問題文の 2 つの例がちょうどその 2 通りです。

| (ア) A が奇数列(例:A = 9) | |
|---|---|
| A = □×□ | B = A + 1 |
| C = A − 1 | D = A + 2 |

| (イ) A が偶数列(例:A = 10) | |
|---|---|
| A = □×□ + 1 | B = △×△ |
| C = A + 1 | D = B − 1 |

(イ)の □ と △ は、となり合う奇数(3 と 5、11 と 13 など)です。

**2** **(ア)のとき**:4 つの数は A − 1、A、A + 1、A + 2 なので、X = A × 4 + 2 です。X = 2710 なら A × 4 = 2708、A = 677。ところが 26 × 26 = 676、27 × 27 = 729 なので、677 は同じ数を 2 回かけた数ではありません。(ア)はあてはまりません。

**3** **(イ)のとき**:A + C = (□×□ + 1) + (□×□ + 2) = □×□×2 + 3、 B + D = △×△ + (△×△ − 1) = △×△×2 − 1 なので、

> X = □×□×2 + △×△×2 + 2 = 2710
> → □×□×2 + △×△×2 = 2708 → □×□ + △×△ = 1354

**4** となり合う奇数で、2 回かけた数の和が 1354 になるものをさがします。半分は 1354 ÷ 2 = 677 で、26 × 26 = 676 に近いので、26 をはさむ奇数 25 と 27 をためします。

> $$25 \times 25 + 27 \times 27 = 625 + 729 = 1354$$
> ぴったり!

□ = 25、△ = 27 です。

**5** A = □×□ + 1 = 625 + 1 = 626 です。
(たしかめ:A = 626、C = 627、B = 729、D = 728 で、626 + 627 + 729 + 728 = 2710。合っています。)

**ここに注意!**

(ア)の場合を調べずに(イ)だけで答えを出すのは危険です。「どちらの場合もありうるか」を必ず両方たしかめましょう。

**ポイント**

(1)で具体的な数で調べたしくみを、(2)では「□×□」を使った式にします。和が分かっていて 2 つの平方数をさがすときは、「和の半分に近い平方数」から見当をつけます。

# 5 速さ(往復する 2 点・ダイヤグラム)

問題

5 点 P は A 地点を，点 Q は B 地点を同時に出発し，点 P は毎秒 12cm，点 Q は毎秒 8cm の一定の速さで A 地点と B 地点の間を何度も往復します。2 つの点 P と Q が重なると，点 P はそのまま動き続けますが，点 Q は，重なったときから 1.5 秒間その場で止まり，その後同じ速さで動き出します。点 P が出発してから A 地点に初めて戻ったのは，点 Q が A 地点に初めて着いてから 3 秒後でした。このとき，次の各問いに答えなさい。

(1) A 地点と B 地点の間の距離は何 cm ですか。

(2) 2 つの点 P と Q が 3 回目に重なる場所は，A 地点から何 cm 離れていますか。

(3) 2 つの点 P と Q が B 地点に初めて同時に着くのは，点 P が出発してから何秒後ですか。

## (1) Q が A に着く時間を 2 通りに表す

**答え** **108cm**

1. Q が初めて A に着くまでのようすを考えます。P と Q は向かい合って進むので、とちゅうで 1 回重なり、そこで Q は 1.5 秒止まります。Q が動いている時間は「AB 間 $\div 8$」秒なので、

> Q が A に着く時刻 $=$ (AB 間 $\div 8$) $+ 1.5$ (秒後)

2. P は止まらずに往復するので、

> P が A にもどる時刻 $=$ (AB 間 $\times 2$) $\div 12 =$ AB 間 $\div 6$ (秒後)

3. P がもどるのは Q が着いてから 3 秒後なので、

> AB 間 $\div 6 =$ AB 間 $\div 8 + 1.5 + 3$ $\quad\rightarrow\quad$ AB 間 $\div 6 -$ AB 間 $\div 8 = 4.5$ (秒)

4. AB 間の長さを 6 と 8 の最小公倍数の ㉔ とおくと、㉔ $\div 6 =$ ④、㉔ $\div 8 =$ ③ で、その差の ① が 4.5 秒です。AB 間 $\div 6 =$ ④ $= 4.5 \times 4 = 18$ 秒なので、

> AB 間 $= 18 \times 6 = 108$ (cm)

(たしかめ:P は $108 \times 2 \div 12 = 18$ 秒後、Q は $108 \div 8 + 1.5 = 15$ 秒後。差は 3 秒で合っています。)

**ここに注意!**

Q が A に着く前に、B で折り返してきた P に後ろから追いつかれると、Q はもう 1 回止まってしまいます。でも「P が A にもどるのは Q より後」と問題文にあるので、P は Q に追いついていません。止まるのは 1 回だけと考えてだいじょうぶです。

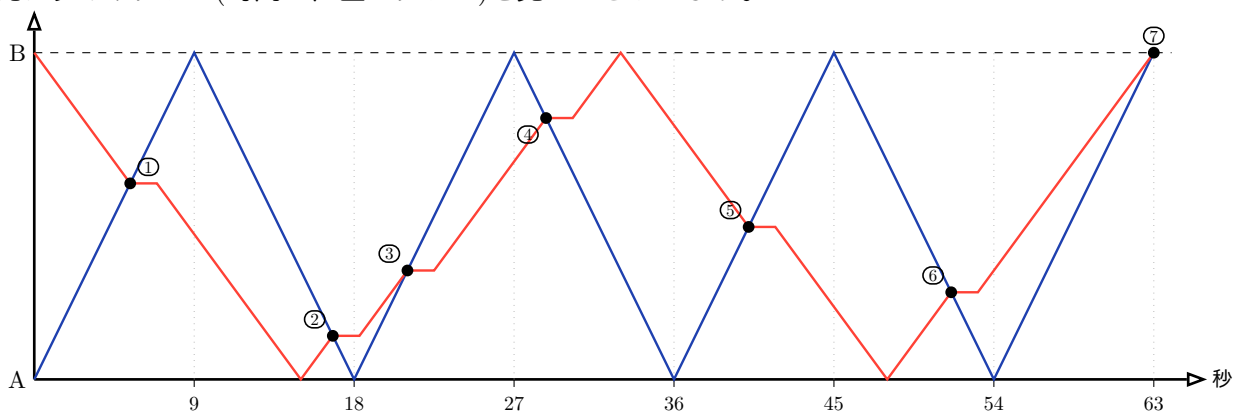
**ポイント**

「止まる」動きがあっても、動いている時間は「道のり ÷ 速さ」で変わりません。止まった時間をあとからたせばよいのです。

## (2) 1 回ずつ順番に追いかける

**答え** **36cm**

1 AB 間は 108cm です。P が片道にかかる時間は $108 \div 12 = 9$ 秒なので、P は 9 秒後に B、18 秒後に A、27 秒後に B、…と、9 秒ごとにはしに着きます。これをもとに、重なる場面を 1 回ずつ調べます。先にダイヤグラム(時間と位置のグラフ)を見ておきましょう。




青:P の動き 赤:Q の動き(平らなところが 1.5 秒の停止) ①〜⑦:重なる場所

2 **1 回目(向かい合って出会う)**:2 点は 108cm はなれて向かい合うので、$108 \div (12+8) = 5.4$ 秒後に重なります。場所は A から $12 \times 5.4 = 64.8$ cm です。Q は 6.9 秒後まで止まり、残り 64.8cm を $64.8 \div 8 = 8.1$ 秒で進んで、$6.9 + 8.1 = 15$ 秒後に A に着きます。

3 **2 回目(向かい合って出会う)**:15 秒後、Q は A を出て B へ向かいます。このとき P は A にもどる 3 秒前(18 秒後に A)なので、A から $12 \times 3 = 36$ cm のところを A に向かって進んでいます。36cm はなれて向かい合うので、$36 \div 20 = 1.8$ 秒後、つまり 16.8 秒後に重なります。場所は A から $8 \times 1.8 = 14.4$ cm です。Q は 18.3 秒後まで止まります。

4 **3 回目(P が後ろから追いつく)**:P は 18 秒後に A で折り返して B へ向かいます。Q が動き出す 18.3 秒後には、P は A から $12 \times 0.3 = 3.6$ cm のところにいます。Q は A から 14.4cm のところから B へ向かって動き出すので、2 点の差は $14.4 - 3.6 = 10.8$ cm。同じ向きなので、追いつくまでの時間は

$$10.8 \div (12-8) = 2.7 \text{ (秒)}$$

$\rightarrow$ $18.3 + 2.7 = 21$ 秒後

場所は A から $3.6 + 12 \times 2.7 = 36$ cm です。

**ここに注意!**

「重なる」には、向かい合って出会う場合と、P が後ろから追いつく場合の 2 種類があります。出会いは速さの和 20、追いつきは速さの差 4 でわります。P が折り返すたびに、どちらの場面なのかを確かめましょう。

**ポイント**

動きが複雑な往復の問題は、公式 1 つで解こうとせず、「Q が動き出す時刻」や「P が折り返す時刻」で区切って、そのとき 2 点がどこにいて、どちら向きに進んでいるかを 1 つずつ書き出します。ダイヤグラムを書くと見落としがなくなります。

## (3) 同じ調べ方を続ける

**答え** **63 秒後**

1. (2)の続きを同じように調べます。3 回目は 21 秒後、A から 36cm のところでした。Q は 22.5 秒後まで止まり、そのあと B へ向かいます。
2. **4 回目(出会い)**:P は 27 秒後に B で折り返します。そのとき Q は $27-22.5=4.5$ 秒動いたので、A から $36+8\times4.5=72$ cm のところにいます。P との間は $108-72=36$ cm で向かい合うので、$36\div20=1.8$ 秒後の 28.8 秒後に重なります。場所は A から $72+8\times1.8=86.4$ cm です。
   Q は 30.3 秒後まで止まり、残り $108-86.4=21.6$ cm を $21.6\div8=2.7$ 秒で進んで、**33 秒後に B に着きます**。このとき P は A の近く(36 秒後に A)にいるので、同時ではありません。
3. **5 回目(出会い)**:33 秒後に Q が B を出たとき、P は Q より前を A に向かって進んでいて、P のほうが速いので重なりません。P は 36 秒後に A で折り返します。そのとき Q は B から $8\times3=24$ cm 進んでいて、A から $108-24=84$ cm のところです。向かい合うので $84\div20=4.2$ 秒後の 40.2 秒後に重なります。場所は A から $12\times4.2=50.4$ cm です。
   Q は 41.7 秒後まで止まり、$50.4\div8=6.3$ 秒進んで 48 秒後に A に着きます。
4. **6 回目(出会い)**:P は 45 秒後に B で折り返しているので、48 秒後には B から $12\times3=36$ cm、つまり A から 72cm のところを A に向かっています。Q は A を出て B へ向かうので、$72\div20=3.6$ 秒後の 51.6 秒後に重なります。場所は A から $8\times3.6=28.8$ cm です。Q は 53.1 秒後まで止まります。
5. **7 回目(追いつき)**:P は 54 秒後に A で折り返して B へ向かいます。そのとき Q は $54-53.1=0.9$ 秒動いていて、A から $28.8+8\times0.9=36$ cm のところにいます。同じ向きなので、追いつくのは $36\div(12-8)=9$ 秒後の **63 秒後** です。場所は A から $12\times9=108$ cm、つまりちょうど B 地点です。
6. まとめると次の表のようになります。P が B に着くのは 9, 27, 45, 63 秒後、Q が B に着くのは 33, 63 秒後なので、初めて同時に B に着くのは 63 秒後です。

| 重なり | 時刻 | A からの場所 | 種類 | Q が止まっている時間 |
|---|---|---|---|---|
| 1 回目 | 5.4 秒後 | 64.8cm | 出会い | 5.4〜6.9 秒 |
| 2 回目 | 16.8 秒後 | 14.4cm | 出会い | 16.8〜18.3 秒 |
| 3 回目 | 21 秒後 | 36cm | 追いつき | 21〜22.5 秒 |
| 4 回目 | 28.8 秒後 | 86.4cm | 出会い | 28.8〜30.3 秒 |
| 5 回目 | 40.2 秒後 | 50.4cm | 出会い | 40.2〜41.7 秒 |
| 6 回目 | 51.6 秒後 | 28.8cm | 出会い | 51.6〜53.1 秒 |
| 7 回目 | 63 秒後 | 108cm(B 地点) | 追いつき | |

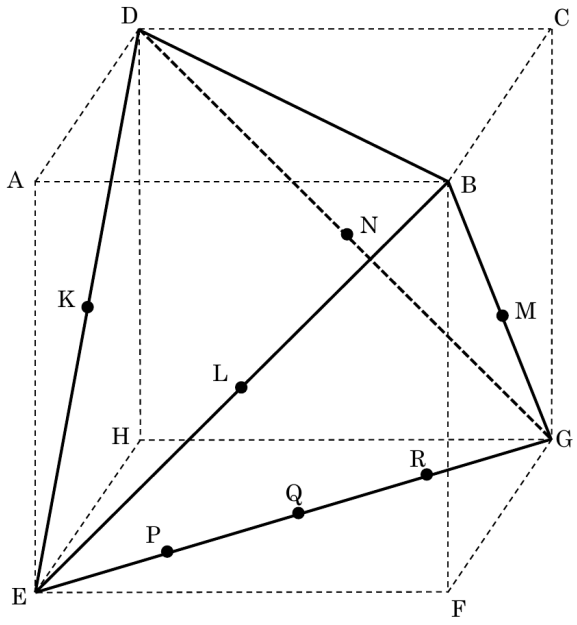
**ポイント**

P は止まらないので、「9 秒ごとにはしに着く」という時刻表を先に作っておくと、どの時刻でも P の場所がすぐに分かります。Q だけを 1 区間ずつ追いかければよいので、計算がずっと楽になります。最後に「P が追いついた場所がちょうど B」という形で同時到着が見つかることもあります。

# 6 立体図形(立方体の中の三角すいと切断)

問題

6 下の図のように，1 辺の長さが 12cm の立方体 ABCD－EFGH の頂点 B，D，E，G を結んでできる三角すいを立体（あ）とします。立体（あ）の辺 DE，BE，BG，DG の真ん中の点をそれぞれ K，L，M，N とし，辺 EG を 4 等分する点を E に近い方から P，Q，R とします。このとき，次の各問いに答えなさい。



問題

(1) 立体（あ）を 4 つの点 K，L，M，N を通る平面で切り分けたとき，点 Q を含む立体を（い）とします。立体（い）の体積は何 $cm^3$ ですか。

(2) (1) の立体（い）を 3 つの点 K，L，P を通る平面と 3 つの点 M，N，R を通る平面で切り分けたとき，点 Q を含む立体を（う）とします。立体（う）の体積は何 $cm^3$ ですか。

(3) (2) の立体（う）の 3 つの辺 KP，LP，MR の真ん中の点をこの順に X，Y，Z とします。3 つの点 X，Y，Z を通る平面で立体（う）を切り分けたとき，点 Q を含む立体の体積は何 $cm^3$ ですか。

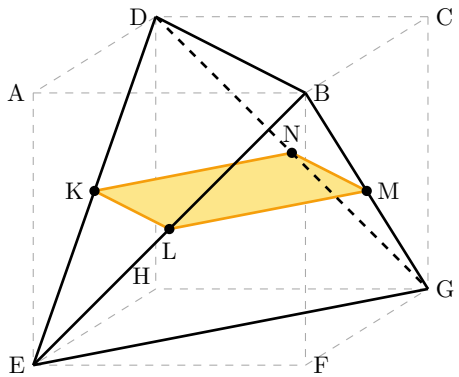
## (1) まん中の高さで切ると半分

答え **$288cm^3$**

1 まず立体(あ)の体積を求めます。(あ)は、立方体から 4 つのかどの三角すい(A-BDE、C-BDG、F-BEG、H-DEG)を切り落とした形です。かどの三角すい 1 つは、底面が直角二等辺三角形、高さが 12cm なので、

> かどの三角すい 1 つ … $12 \times 12 \div 2 \times 12 \div 3 = 288$ $(cm^3)$
> 立体(あ) … $12 \times 12 \times 12 - 288 \times 4 = 1728 - 1152 = 576$ $(cm^3)$

2 K, L, M, N はどれも、上の面の点(B や D)と下の面の点(E や G)を結ぶ辺のまん中なので、すべて **高さ 6cm** のところにあります。だから切り口 KLMN は、立方体をちょうど半分の高さで水平に切った面の上にあります。




立体(あ)と切り口 KLMN(色のついた四角形)。切り口は高さ 6cm の水平な面

3 (あ)は、上に辺 BD、下に辺 EG があり、4 つの面がすべて同じ正三角形の立体(正四面体)です。まん中の高さで切ると、上の部分(辺 BD をふくむ)と下の部分(辺 EG をふくむ)は、向きがちがうだけでまったく同じ形になります。

4 だから、Q をふくむ下の部分(い)の体積は、(あ)のちょうど半分で

$$576 \div 2 = 288 \ (\text{cm}^3)$$

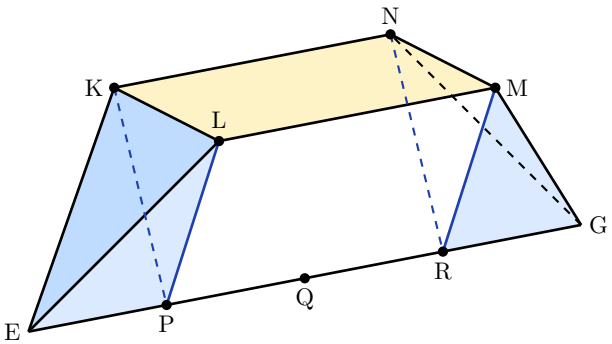
**ポイント**

立方体の 4 つの頂点を 1 つおきに結んだ三角すいは、「立方体 − かどの三角すい × 4」で、立方体の体積の $\frac{1}{3}$ になります(覚えておくと速い)。辺のまん中の点が出てきたら、「高さがいくつの点か」を考えると、切り口のようすが分かります。

## (2) かどの小さな三角すいを取りのぞく

**答え** **216cm³**

1 立体(い)は、下の辺 EG と、上の正方形 KLMN でできた立体です。これを平面 KLP と平面 MNR で切ると、E の側と G の側から三角すいが 1 つずつ切り落とされ、まん中に Q をふくむ立体(う)が残ります。




立体(い)。青い部分(三角すい E-KLP と G-MNR)を切り落とした残りが(う)

2 切り落とす三角すい E-KLP の体積を考えます。その前に、P のかわりに Q を使った三角すい E-KLQ を考えます。K, L, Q はそれぞれ辺 ED, EB, EG のまん中なので、三角すい E-KLQ は(あ)(= 三角すい E-DBG)を $\frac{1}{2}$ にちぢめた形です。体積は

$$576 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 72 \ (\text{cm}^3)$$

3 P は EQ のまん中です。三角形 EKL を底面と見ると、頂点が Q から P に変わることで高さが半分になるので、

三角すい E-KLP … $72 \div 2 = 36 \ (\text{cm}^3)$

G の側の三角すい G-MNR も、同じ形なので $36\text{cm}^3$ です。

4 立体(う)の体積は、(い)から 2 つの三角すいをひいて

$$288 - 36 \times 2 = 216 \ (\text{cm}^3)$$

**別の解き方**

KN と LM は EG と平行で、長さは EG の半分です。PR も EG の半分です。つまり KN, LM, PR は平行で同じ長さなので、(う)は三角形 KLP と三角形 NMR を底面とする **三角柱を横にたおした形** です。正方形 KLMN は対角線が 12cm なので、面積は $12 \times 12 \div 2 = 72$ (cm²)。辺 PR は、この正方形から 6cm 下にあります。(う)と同じ立体をもう 1 つさかさまにして組み合わせると、底面が 72cm²・高さが 6cm の四角柱になるので、

$$72 \times 6 \div 2 = 216 \ (\text{cm}^3)$$

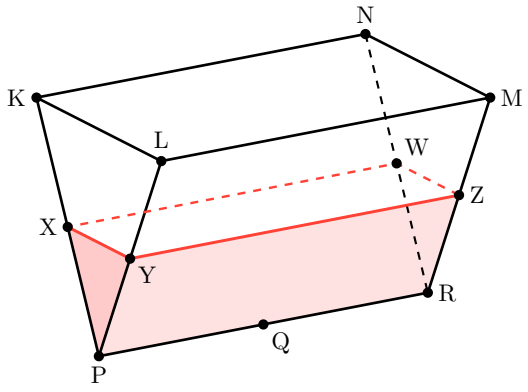
**ポイント**

同じ形にちぢめた立体は、辺が $\frac{1}{2}$ なら体積は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$。また、底面が同じ三角すいは、高さの比がそのまま体積の比になります。「全体から切り落とす部分をひく」と考えると、複雑な立体も計算できます。

## (3) 三角柱を半分の高さで切る

**答え** **54cm³**

1. (2)の「別の解き方」で見たように、(う)は三角形 KLP と三角形 NMR を底面とする三角柱を横にたおした形で、柱の長さは PR です(KN, LM, PR が平行で同じ長さ)。
2. X, Y, Z はそれぞれ KP, LP, MR のまん中です。K, L, M は高さ 6cm、P, R は高さ 0cm なので、X, Y, Z はどれも **高さ 3cm** にあります。だから X, Y, Z を通る平面は高さ 3cm の水平な面で、NR のまん中(W とします)も通ります。切り口は四角形 XYZW です。




立体(う)(三角柱)と切り口 XYZW。色のついた下の部分が Q をふくむ立体

3. Q は辺 PR の上にあるので、Q をふくむのは切り口より下の部分です。これは三角形 PXY と三角形 RWZ を底面とする三角柱で、柱の長さは(う)と同じ PR です。
4. 三角形 PXY は、三角形 PKL を $\frac{1}{2}$ にちぢめた形(X, Y が辺のまん中)なので、面積は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ です。柱の長さが同じなので、体積も $\frac{1}{4}$ になります。

$$216 \times \frac{1}{4} = 54 \ (\text{cm}^3)$$

**ポイント**

同じ長さの柱どうしは、底面積の比がそのまま体積の比になります。辺のまん中を結んでできる三角形は、もとの三角形の $\frac{1}{4}$。$(1)(2)(3)$のように前の答えを使って進む問題では、「今の立体が前の立体の何分のいくつか」を考えましょう。