平成 30 年度(2018 年度) 豊島岡女子学園中学校

第 3 回 算数 解答解説

■ 解答一覧

大問	小問	答え
1	(1)	$\frac{19}{30}$
1	(2)	2.02 km
1	(3)	1918
1	(4)	4800 円
2	(1)	時速 4.8 km
2	(2)	28
2	(3)	4 通り
2	(4)	11.775 cm^2
3	(1)	6 回
3	(2)	20 cm
4	(1)	24 本
4	(2)	59 本
5	(1)	12 分後
5	(2)	毎分 10 L
5	(3)	毎分 7.5 L
6	(1)	8 cm
6	(2)	32 cm^3
6	(3)	724 cm^3

1 計算・小問集合

問題

(1) $2\frac{4}{5} \div \frac{7}{3} \times 0.75 - \frac{4}{9} \div \left(2 - \frac{1}{3}\right)$ を計算しなさい。

(1) 分数と小数の計算

答え $\frac{19}{30}$

1. 小数と帯分数は、分数(仮分数)に直してから計算します。分数にそろえると約分ができて楽だからです。 $2\frac{4}{5} = \frac{14}{5}$、$0.75 = \frac{3}{4}$ です。
2. ひき算の記号で、式を「前のかたまり」と「後ろのかたまり」に分けます。かけ算・わり算はひき算より先に計算するからです。

   前:$\frac{14}{5} \div \frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{14}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{10}$　(14 と 7、14 の残りの 2 と 4 を約分)
   後ろ:$\frac{4}{9} \div \left(2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \div \frac{5}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$
3. 最後にひき算をします。分母を 10 と 15 の最小公倍数の 30 にそろえます。

$$\frac{9}{10} - \frac{4}{15} = \frac{27}{30} - \frac{8}{30} = \frac{19}{30}$$

ポイント

$+$ と $-$ のところで式をかたまりに区切り、かたまりごとに計算する。0.75 は $\frac{3}{4}$、0.25 は $\frac{1}{4}$、0.125 は $\frac{1}{8}$ のように、よく出る小数はすぐ分数に直せるようにしておこう。

問題

(2) 時速 1.8 km で 1 時間 7 分 20 秒進んだとき，何 km 進みましたか。

(2) 速さと単位

答え **2.02 km**

1. 時間に「分」と「秒」がまじっているので、速さのほうを分速に直します。時速 1.8 km は 1 時間(60 分)に 1800 m 進む速さなので、

$$1800 \div 60 = 30 \quad (\text{分速 } 30 \text{ m})$$

2. 1 時間 7 分 20 秒は 67 分 20 秒です。20 秒は $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ 分なので、$67\frac{1}{3}$ 分です。
3. 道のり $=$ 速さ $\times$ 時間 なので、

$$30 \times 67\frac{1}{3} = 30 \times 67 + 30 \times \frac{1}{3} = 2010 + 10 = 2020(\text{m})$$

2020 m $= 2.02$ km です。

ポイント

時間に分や秒がまじっていたら、速さの単位を時間に合わせて直す(時速 $\to$ 分速は $\div 60$)。「20 秒 $= \frac{1}{3}$ 分」のように、秒は分数で表すと計算がきれいになる。

問題

(3) 2018 以下の整数の中で，2 で割り切れ，3 で割ると 1 余り，5 で割ると 3 余り，7 で割り切れる一番大きい整数はいくつですか。

(3) わり算のあまりと倍数

答え **1918**

1. 条件が 4 つあるので、まず使いやすいものをまとめます。「2 で割り切れ、7 でも割り切れる」数は、2 と 7 の最小公倍数 14 の倍数です。
2. 14 の倍数を小さい順に書き出して、残りの条件「3 で割ると 1 余る」「5 で割ると 3 余る」に合うものをさがします。

> 14 … 5 で割ると 4 余る $\times$
> 28 … $28 \div 3 = 9$ 余り 1 ◯、$28 \div 5 = 5$ 余り 3 ◯

いちばん小さい数は 28 と分かりました。

3. 次に条件に合う数は、28 に「$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ の最小公倍数」を足した数です。なぜなら、2 でも 3 でも 5 でも 7 でも割り切れる数を足しても、余りは変わらないからです。最小公倍数は $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ なので、条件に合う数は

$$28, \quad 28 + 210, \quad 28 + 210 \times 2, \quad \cdots$$

4. 2018 以下でいちばん大きいものをさがします。$(2018 - 28) \div 210 = 1990 \div 210 = 9$ 余り 100 なので、210 は 9 回まで足せます。

$$28 + 210 \times 9 = 28 + 1890 = 1918$$

ポイント

あまりの条件がいくつもあるときは「①いちばん小さい数を書き出して見つける $\to$ ②あとは最小公倍数ずつ増える」の 2 段がまえ。割り切れる条件どうしは先に最小公倍数でまとめると、書き出しが早くなる。

問題

(4) ある洋服を，定価から 300 円引きにした値段のさらに 2 割引きで売値をつけたところ，定価の 25%引きと同じ値段になりました。定価はいくらですか。

(4) 売買(ばいばい)と割合

答え **4800 円**

1. 定価を ① とします。「定価の 25% 引き」は ① の 0.75 倍なので、売値は ⓪.⑦⑤ です。

2 もう一方の言い方も ① で表します。「300 円引きにした値段の 2 割引き」は (① − 300 円) を 0.8 倍したものです。分配法則で、両方に 0.8 をかけます。

$$(① - 300) \times 0.8 = \textcircled{0.8} - 240(円)$$

3 この 2 つが同じ値段なので、$\textcircled{0.8}$ と $\textcircled{0.75}$ の差の $\textcircled{0.05}$ が 240 円にあたります。

$$① = 240 \div 0.05 = 4800(円)$$

4 たしかめ:$(4800 - 300) \times 0.8 = 3600$ 円、$4800 \times 0.75 = 3600$ 円。同じになりました。

ここに注意!

「300 円引いてから 2 割引き」なので、300 円にも 0.8 がかかります。実際に安くなっているのは $300 \times 0.8 = 240$ 円分であることに注意しましょう。

ポイント

同じ値段を 2 通りに表している問題は、定価を ① とおいて 2 つの式を作り、丸数字の差が何円にあたるかを見る。

2 小問集合

問題

(1) 周囲 4.5km の池の周りを，豊子さんは自転車で，花子さんは歩いてそれぞれ一定の速さで進みます。2 人が同じ場所から同時に，同じ方向に進むと 50 分で豊子さんは花子さんに初めて追いつき，反対方向に進むと 18 分で初めて出会います。このとき，花子さんの歩く速さは時速何 km ですか。

(1) 池のまわりの旅人算

答え 時速 4.8 km

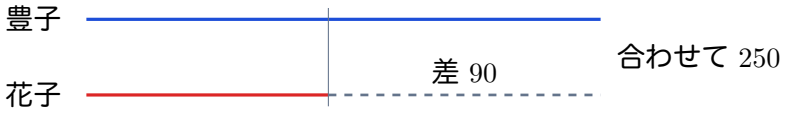
1. 同じ方向に進むと、速い豊子さんが花子さんより池 1 周分(4500 m)多く進んだときに追いつきます。それに 50 分かかるので、

$$2\text{ 人の分速の差} = 4500 \div 50 = 90(\text{m})$$

2. 反対方向に進むと、2 人が進んだ道のりの合計が池 1 周分(4500 m)になったときに出会います。それに 18 分かかるので、

$$2\text{ 人の分速の和} = 4500 \div 18 = 250(\text{m})$$

3. 和が 250、差が 90 と分かったので、和差算です。花子さんは小さいほうなので、



和差算の線分図

$$\text{花子さんの分速} = (250 - 90) \div 2 = 80(\text{m})$$

4. 時速に直します。分速 80 m は 1 時間に $80 \times 60 = 4800$ m 進むので、時速 4.8 km です。

ポイント

池のまわりの旅人算は「追いつく = 1 周分の差がつく → 速さの差」「出会う = 合わせて 1 周分 → 速さの和」。和と差が出たら和差算でそれぞれの速さを出す。

問題

(2) 同じ長さの 3 本のロープ A，B，C があり，それぞれのロープの両端(りょうたん)をつなげて正多角形を作ります。ロープ A を使って正 18 角形を，ロープ B を使って正 21 角形を作ると，それらの 1 辺の長さの差は 2cm になりました。ロープ C を使って正 □ 角形を作ると，1 辺の長さは 9cm になりました。このとき，□ に当てはまる数を答えなさい。

(2) 同じ長さのロープと逆比

答え 28

1 ロープの長さは同じなので、辺の数が多いほど 1 辺は短くなります。「1 辺の長さ × 辺の数 = ロープの長さ(同じ)」なので、1 辺の長さの比は、辺の数の比の逆(ぎゃく)になります。

> 辺の数の比　正 18 角形:正 21 角形 $= 18 : 21 = 6 : 7$
> 1 辺の長さの比　正 18 角形:正 21 角形 $=$ ⑦ : ⑥

2 1 辺の長さの差は ⑦ − ⑥ = ① で、これが 2 cm です。だから正 18 角形の 1 辺は ⑦ $= 2 \times 7 = 14$ cm です。

3 ロープの長さは $14 \times 18 = 252$ cm です。(正 21 角形でたしかめると、1 辺は 12 cm で $12 \times 21 = 252$ cm。合っています。)

4 ロープ C も 252 cm で、1 辺が 9 cm なので、辺の数は

$$252 \div 9 = 28$$

正 28 角形です。

ポイント

「かけ算の答えが同じ」ときは逆比。A × B が一定なら、A の比が 6 : 7 のとき B の比は 7 : 6 になる。

問題

(3) あるお店では，商品 A を 80 円で，B を 500 円で，C を 760 円で売っています。豊子さんがそれらの商品を何個か買ったところ，合計金額が 2240 円になりました。このとき，豊子さんが買った商品 A，B，C の個数の組み合わせは何通り考えられますか。ただし，1 個も買わなかった商品があってもよいものとします。

(3) 合計金額から個数の組をさがす

答え　4 通り

1 いちばん高い C(760 円)の個数で場合分けします。高いものは買える個数が少ないので、場合の数が少なくてすむからです。$760 \times 3 = 2280$ 円は 2240 円をこえるので、C は 0 個、1 個、2 個のどれかです。

2 C の個数を決めたら、次に高い B(500 円)の個数を 0 個から順にためします。残った金額が 80 円(A のねだん)で割り切れれば ◯ です。

C の個数	B の個数	残りの金額	÷80	A の個数
0	0	2240 円	28	◯ 28 個
0	1	1740 円	割り切れない	×
0	2	1240 円	割り切れない	×
0	3	740 円	割り切れない	×
0	4	240 円	3	◯ 3 個
1	0	1480 円	割り切れない	×
1	1	980 円	割り切れない	×
1	2	480 円	6	◯ 6 個
2	0	720 円	9	◯ 9 個
2	1	220 円	割り切れない	×

3 ◯ がついたのは (A, B, C) = (28, 0, 0)、(3, 4, 0)、(6, 2, 1)、(9, 0, 2) の 4 通りです。

ここに注意!

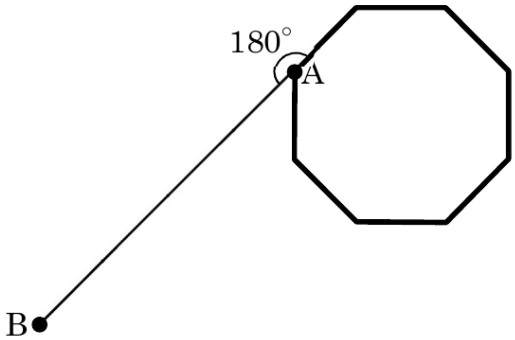
「1 個も買わなかった商品があってもよい」ので、0 個の場合を落とさないようにしましょう。

ポイント

3 種類の品物の買い方は、ねだんの高いものから個数を決めて表に書き出す。最後の 1 種類は「残りの金額が割り切れるか」だけを調べればよい。

問題

(4) 下の図は 1 辺の長さが 1cm の正八角形で，1 つの頂点 A に長さ 4cm の糸の片方の端(はし)がついています。この糸を図の状態から正八角形の周に沿って，糸がたるまないようにして反時計回りに巻きつけていきます。このとき，糸のもう一つの端 B が正八角形の頂点に着くまでに糸が通った部分の　面積は何 cm^2 ですか。ただし，糸の太さは考えないものとします。



(4) 糸をまきつけるときの面積

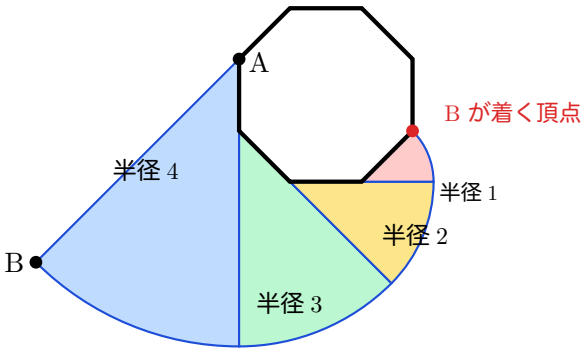
答え **11.775 cm^2**

1 糸をぴんと張ったまま動かすと、糸の先 B は、糸が角(かど)にひっかかっている点を中心にした円をえがきます。つまり、糸が通る部分は「おうぎ形」をつなげた形になります。

2 おうぎ形の中心角を考えます。はじめ、糸は正八角形の辺をまっすぐのばした向きにあります。糸が次の辺にぴったりつくまでに回る角度は、正八角形の外角と同じです。外角の和は 360° なので、

$$360 \div 8 = 45 \quad (\text{どのおうぎ形も中心角は } 45 \text{ 度})$$

3 半径を考えます。辺に 1 cm まきつくごとに、あまっている糸は 1 cm ずつ短くなります。だから半径は 4 cm → 3 cm → 2 cm → 1 cm と変わり、その次に B がちょうど頂点に着きます。



糸が通った部分(半径 4, 3, 2, 1 cm、中心角 45° のおうぎ形 4 つ)

4 45° は 360° の $\frac{1}{8}$ です。4 つのおうぎ形の面積を、3.14 をまとめて計算します。

$$(4\times4+3\times3+2\times2+1\times1)\times3.14\times\frac{1}{8}=30\times3.14\times\frac{1}{8}=94.2\div8=11.775(\mathrm{cm}^2)$$

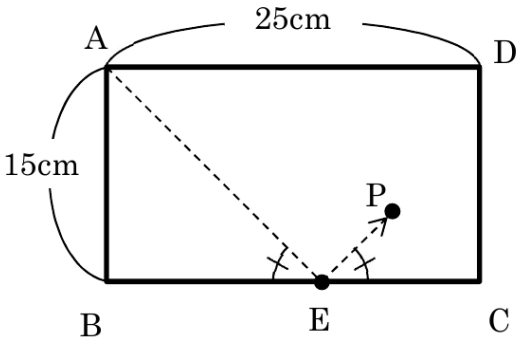
ポイント

糸・ひものまきつけは「ひっかかる角ごとに、中心が変わり半径が辺の長さ分だけ短くなるおうぎ形」をかく。正多角形なら回る角度は外角(360° ÷ 辺の数)。3.14 の計算は最後に 1 回だけにまとめる。

3 平面図形(反射)

問題

3 下の＜図 1＞のように，辺 AB の長さが 15cm，辺 AD の長さが 25cm の長方形 ABCD があります。点 P は，長方形の内部をまっすぐ進み，長方形の辺に当たると入ってきた角度と同じ角度ではね返り，長方形の頂点に当たると止まります。点 P が頂点 A から辺 BC の上の点 E に向かって出発するとき，次の各問いに答えなさい。



＜図 1＞

問題

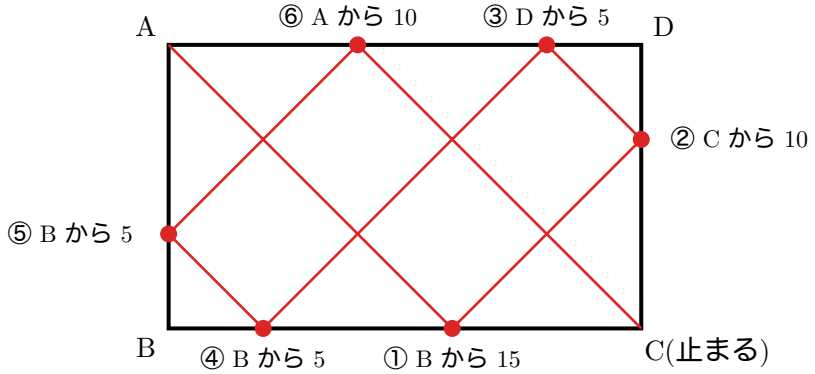
(1) BE の長さが 15cm であるとき，点 P は出発してから止まるまでに長方形の辺で何回はね返りますか。

(1) 45°ではね返る点を追いかける

答え 6 回

1 AB = 15 cm、BE = 15 cm なので、三角形 ABE は直角二等辺三角形です。つまり点 P は辺に対して 45° の向きに進みます。はね返っても角度は同じなので、P はいつも「たてに 1 cm 進むと横にも 1 cm 進む」ななめ 45° の動きをします。

2 この性質を使って、辺に当たる場所を順に求めます。当たるたびに直角二等辺三角形ができるので、長さが次々に分かります。



点 P の道すじ(①〜⑥がはね返る場所)

① 辺 BC 上、B から 15 cm(C まで残り $25-15=10$ cm)
② 横に 10 cm 進むと上にも 10 cm → 辺 CD 上、C から 10 cm(D まで残り 5 cm)
③ 上に 5 cm 進むと横に 5 cm もどる → 辺 AD 上、D から 5 cm(A から 20 cm)
④ 下に 15 cm 進むと横に 15 cm → 辺 BC 上、B から $20-15=5$ cm
⑤ 横に 5 cm 進むと上に 5 cm → 辺 AB 上、B から 5 cm(A まで残り 10 cm)
⑥ 上に 10 cm 進むと横に 10 cm → 辺 AD 上、A から 10 cm(D まで残り 15 cm)
そのあと、横に 15 cm 進むと下にちょうど 15 cm → 頂点 C に着いて止まる

3 はね返ったのは ①〜⑥ の 6 回です。

別の解き方

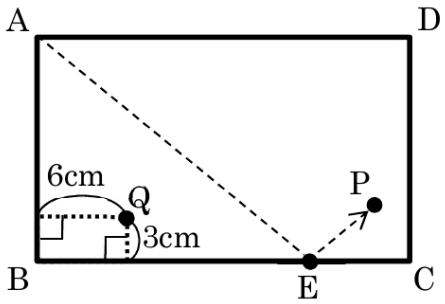
はね返るかわりに、長方形のほうをパタパタと折り返してならべると、P の道すじは 1 本のまっすぐな線になります(次の(2)でくわしく使います)。45° の線は「横に進んだ長さ = たてに進んだ長さ」なので、横が 25 の倍数、たてが 15 の倍数にはじめて同時になるところ、つまり最小公倍数の 75 cm ずつ進んだところで頂点に着きます。
横 75 cm は長方形 $75\div25=3$ 枚分なので、たての辺を $3-1=2$ 回、たて 75 cm は $75\div15=5$ 枚分なので、横の辺を $5-1=4$ 回こえます。こえる回数がはね返る回数なので、$2+4=6$ 回です。

ポイント

45° ではね返る問題は、直角二等辺三角形を次々に作って長さを書きこんでいけば必ず追える。回数だけなら「折り返してまっすぐな線にする → 最小公倍数」で一気に求められる。

問題

(2) 下の＜図 2＞のように，長方形の内部に，辺 AB から 6cm，辺 BC から 3cm 離(はな)れている点 Q があります。点 P は出発してから，辺 BC，CD，DA，AB の順にはね返り，点 Q を通りました。このとき，BE の長さは何 cm でしたか。



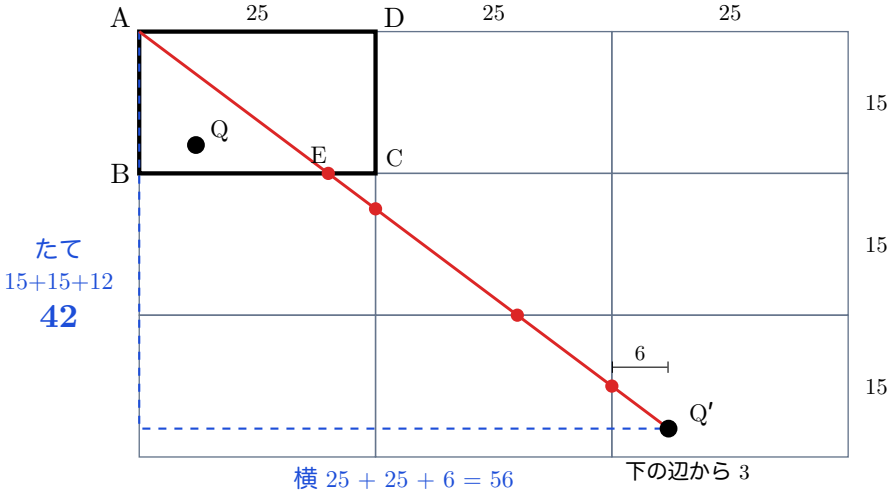
＜図 2＞

(2) 折り返してまっすぐな線にする

答え **20 cm**

1 はね返る点は、角度が同じなので「鏡にうつした世界にまっすぐ進む」と考えることができます。そこで、P がはね返るたびに、長方形をその辺で折り返してとなりにならべます。すると P の道すじは 1 本の直線になります。

2 P は BC → CD → DA → AB の順にはね返るので、長方形を「下 → 右 → 下 → 右」の順に折り返してならべます。Q も折り返しにつれて場所がうつります。最後の長方形での Q の場所を Q′ とします。



折り返した図。太わくが元の長方形、赤い線が P の道すじ

3 Q′ の場所をたしかめます。2 回ずつ折り返しているので、右下の長方形は元と同じ向きです。だから Q′ は、その長方形の左の辺から 6 cm、下の辺から 3 cm のところにあります。A から Q′ までに

> 横に進んだ長さ:$25+25+6=56$ cm
> たてに進んだ長さ:$15+15+(15-3)=42$ cm

4 直線 AQ′ はまっすぐなので、「たて:横」の進み方はどこでも同じです。$42:56=3:4$ なので、たてに 3 進むと横に 4 進みます。三角形 ABE でも $\mathrm{AB}:\mathrm{BE}=3:4$ になるので、

$$\mathrm{BE}=15\times\frac{4}{3}=20(\mathrm{cm})$$

5 たしかめ:E は B から 20 cm。そのあと実際の長方形の中では、CD 上の C から 3.75 cm の点、DA 上の A から 10 cm の点、AB 上の B から 7.5 cm の点の順にはね返ります。最後に横に 6 cm 進むと、$6\times\frac{3}{4}=4.5$ cm 下がって、高さ $7.5-4.5=3$ cm。たしかに Q を通ります。BC → CD → DA → AB の順も合っています。

別の解き方

折り返した図をかかなくても、同じことが言えます。はね返っても角度は変わらないので、P はいつも「たて:横」が同じわりあいで進みます。A を出てから Q に着くまでに、横には「右へ 25 → 左へ 25 → 右へ 6」で合計 56 cm、たてには「下へ 15 → 上へ 15 → 下へ 12」で合計 42 cm 進みます。よって たて:横 $=42:56=3:4$ で、$\mathrm{BE}=15\times\frac{4}{3}=20$ cm です。

ポイント

はね返り(反射)の問題は、図形のほうを折り返して道すじを 1 本の直線にする。直線になれば、大きな直角三角形と小さな直角三角形の相似(たて:横の比が同じ)で長さが出る。

4 規則性(サービス券)

問題

4 あるお店では，ジュースを 1 本買うとサービス券を 1 枚もらうことができて，4 枚以上集めると次にお店に行ったとき，サービス券 4 枚とジュース 1 本が交換(こうかん)できます。花子さんはサービス券が 4 枚以上集まったら必ずその翌日にジュースと交換し，サービス券で交換したジュースもふくめて毎日決まった本数のジュースを持ち帰ります。ただし，交換したジュースについてはサービス券をもらえないものとします。このとき，次の各問いに答えなさい。

問題

(1) 毎日 1 本ずつ持ち帰るとすると，花子さんが買ったジュースは 30 日間で何本になりますか。

(1) 毎日 1 本ずつ持ち帰る

答え **24 本**

1. ルールを整理します。買うと券が 1 枚もらえ、券が 4 枚以上になったら、次の日に券 4 枚をジュース 1 本と交換(こうかん)します。交換したジュースには券がつきません。
2. 1 日目から順に表に書いてみます。

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
買う本数	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
交換の本数	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
その日の終わりの券	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

4 日買うと券が 4 枚たまり、5 日目は交換だけで 1 本持ち帰れます。5 日目の終わりに券は 0 枚にもどるので、「4 日買って 1 日交換」の 5 日間がくり返されます。

3. 30 日間は $30 \div 5 = 6$ セットです。1 セットで買うのは 4 本なので、

$$4 \times 6 = 24(\text{本})$$

ポイント

ルールが文章で書かれた問題は、まず小さい日数で表を作る。「はじめと同じ状態(ここでは券 0 枚)」にもどったら、そこまでが 1 セット(周期)。

問題

(2) 1 日目は 1 本，2 日目は 2 本，3 日目は 3 本，4 日目は 4 本，5 日目は 1 本，6 日目は 2 本，・・・というように，持ち帰る本数を 1 本，2 本，3 本，4 本の順にくり返すことにすると，花子さんが買ったジュースは　30 日間で何本になりますか。

(2) 持ち帰る本数が 1, 2, 3, 4 本とくり返す

答え **59 本**

1 (1)と同じように表を作ります。その日の「買う本数」は「持ち帰る本数 − 交換の本数」です。券は、交換で 4 枚へり、買った本数だけふえます。

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
持ち帰る本数	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
交換の本数	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
買う本数	1	2	3	3	0	2	3	3	0	2
その日の終わりの券	1	3	6	5	1	3	6	5	1	3

2 表の読み方を 4 日目と 5 日目でたしかめます。3 日目の終わりに券が 6 枚あるので、4 日目は 4 枚を 1 本と交換し、残り 3 本を買います。券は $6-4+3=5$ 枚。まだ 4 枚以上あるので、5 日目も 1 本交換します。5 日目は持ち帰りが 1 本だけなので買うのは 0 本、券は $5-4=1$ 枚です。

3 5 日目の終わりは「券 1 枚」で、1 日目の終わりと同じです。持ち帰る本数も 4 日ごとにくり返すので、ここから先は 4 日ごとに同じことがくり返されます。4 日ごとに区切って、買う本数を数えます。

> 1〜4 日目:$1+2+3+3=9$ 本(はじめだけ特別)
> 5〜8 日目:$0+2+3+3=8$ 本
> 9〜12 日目からあとも、4 日ごとに 8 本ずつ

4 30 日間を区切ります。$30\div4=7$ 余り 2 なので、4 日のまとまりが 7 つと、残り 2 日(29 日目と 30 日目)です。

> 1 つ目のまとまり:9 本
> 2〜7 つ目のまとまり(5〜28 日目):$8\times6=48$ 本
> 29 日目・30 日目:まとまりの 1 日目・2 日目と同じで $0+2=2$ 本
> 合計:$9+48+2=59$ 本

ここに注意!

はじめの 4 日間だけは 9 本で、あとのまとまり(8 本)とちがいます。周期の問題では「はじめだけ特別になっていないか」を必ず表でたしかめましょう。

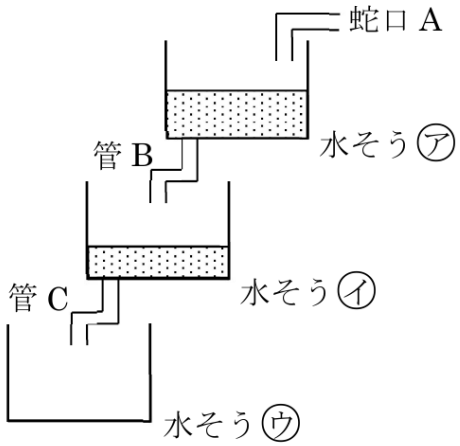
ポイント

周期を見つけるときは、目に見える数(持ち帰る本数)だけでなく「かくれた状態(券の残り)」も同じになっているかをたしかめる。両方そろってはじめて「くり返し」と言える。

5　水そうと水量グラフ

問題

5　下の＜図 1＞のように，底面積が 1000cm² の 3 つの直方体の水そう㋐，㋑，㋒があります。これらの水そうの底面は地面と平行になっています。蛇口(じゃぐち) A からは水が一定の割合で水そう㋐に入ります。また，水そう㋐には管 B が，水そう㋑には管 C がついており，㋐から㋑へ，㋑から㋒へそれぞれ一定の割合で水が流れます。はじめ，水そう㋐には底面から 36cm の高さまで，水そう㋑には底面から 24cm の高さまで水が入っており，水そう㋒には水は入っていません。また，蛇口 A，管 B，C はすべて閉じています。このとき，次の各問いに答えなさい。



＜図 1＞

はじめに　底面積が $1000\ \text{cm}^2$ なので、深さ $1\ \text{cm}$ 分の水は $1000 \times 1 = 1000\ \text{cm}^3 = 1\ \text{L}$ です。つまり、この問題では「**水面の高さ(cm)の数 ＝ 水の量(L)の数**」です。はじめ、㋐ には $36\ \text{L}$、㋑ には $24\ \text{L}$、㋒ には $0\ \text{L}$ 入っています。

問題

(1) 蛇口 A は閉じたまま管 B と C を同時に開け，どちらの管からも毎分 5L の割合で水を流すと，水そう㋐と㋑の両方が空(から)になるのは，管を開けてから何分後ですか。

(1)　両方が空になるまでの時間

答え　**12 分後**

1. ㋐ と ㋑ が両方空になるのは、はじめにあった水 $36 + 24 = 60\ \text{L}$ が全部 ㋒ に移ったときです。㋒ に入る水は、必ず管 C を通ります。
2. 管 C から水が毎分 $5\ \text{L}$ ずつ出つづけるかをたしかめます。㋑ には管 B から毎分 $5\ \text{L}$ 入り、管 C から毎分 $5\ \text{L}$ 出るので、㋐ が空になるまで ㋑ の水は $24\ \text{L}$ のまま変わりません。そのあとも ㋑ が空になるまで C は流れつづけます。

3 だから、60 L が毎分 5 L で流れきる時間を求めればよく、

$$60 \div 5 = 12(\text{分後})$$

別の解き方

順に追いかけても求められます。㋐ が空になるのは $36 \div 5 = 7.2$ 分後。それまで ㋑ は 24 L のまま。そのあと ㋑ は入る水がなくなり、$24 \div 5 = 4.8$ 分で空になります。$7.2 + 4.8 = 12$ 分後です。

ポイント

水そうがつながっている問題は、「全部の水が最後の出口を通る」と考えると、とちゅうの様子を追わなくても時間が出せることがある。ただし、出口の水がとちゅうで止まらないことはたしかめる。

問題

(2) はじめの状態にもどし，蛇口 A は閉じたまま管 B と C を同時に開け，管 B から毎分 8L の割合で水を流します。3 つの水そうのそれぞれの水面の底面からの高さが同じになるときがあるためには，管 C の水量を毎分　何 L にすればよいですか。

(2) 3 つの水面の高さが同じになる

答え　毎分 10 L

1 水は外にこぼれないので、3 つの水そうの水の合計はいつも 60 L です。3 つの高さが同じになるとき、底面積が同じなので水の量も同じです。だから 1 つあたり

$$60 \div 3 = 20(\text{L}) \quad (\text{高さ } 20 \text{ cm})$$

2 ㋐ が 20 L になる時間を求めます。㋐ は管 B から毎分 8 L ずつ出ていくだけなので、36 L から 20 L まで 16 L へるのにかかる時間は

$$(36 - 20) \div 8 = 2(\text{分})$$

3 このとき ㋒ にも 20 L 入っていなければなりません。㋒ には管 C の水だけが入るので、

$$20 \div 2 = 10 \quad (\text{毎分 } 10 \text{ L})$$

4 たしかめ:2 分後の ㋑ は、16 L 入って 20 L 出るので $24 + 16 - 20 = 20$ L。3 つとも 20 L でそろいます。

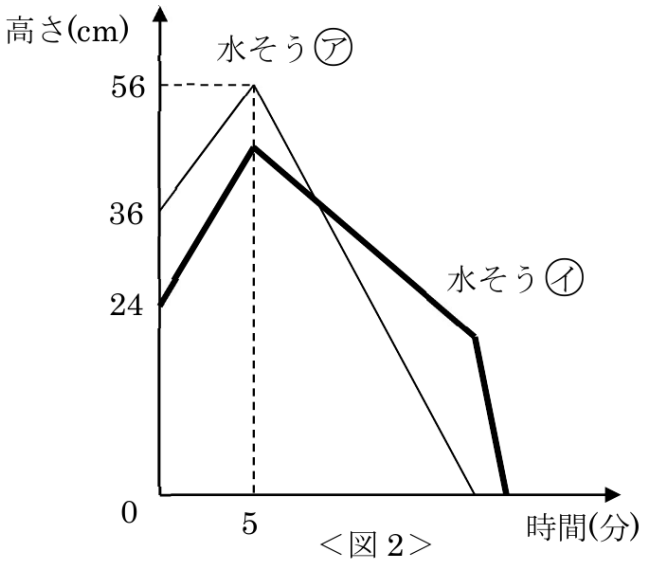
	㋐	㋑	㋒
はじめ	36 L	24 L	0 L
2 分間の変化	−16 L(B)	+16 L(B)、−20 L(C)	+20 L(C)
2 分後	20 L	20 L	20 L

ポイント

「同じ高さになる」ときは、合計が変わらないことを使って、先にゴールの量(合計 ÷ 個数)を決める。そのあと、出入りが 1 つしかない水そう(㋐ や ㋒)から時間や水量を求める。

問題

(3) はじめの状態にもどし，蛇口 A と管 B を同時に開き，A から毎分 9L の割合で水そう㋐に水を入れました。5 分後に蛇口 A を閉じ，同時に管 C を開きました。水そう㋐が空になって 2 分 48 秒後に水そう㋑が空になりました。下の＜図 2＞は蛇口 A と管 B を開いてからの時間と水そう㋐，㋑のそれぞれの水面の底面からの高さの関係を表したものです。このとき，管 C の水量は毎分何 L ですか。



＜図 2＞

(3) グラフから管 C の水量を求める

答え **毎分 7.5 L**

1. まず、グラフのはじめの 5 分間から管 B の水量を求めます。㋐ は 5 分間で 36 cm から 56 cm に、つまり 20 L ふえています。5 分間に蛇口 A から入った水は $9 \times 5 = 45$ L なので、管 B から出た水は

$$45 - 20 = 25(\text{L}) \quad \rightarrow \quad 25 \div 5 = 5 \quad (\text{管 B は毎分 5 L})$$

2. 5 分後の ㋑ の水の量を求めます。5 分間は管 C が閉じているので、B から来た 25 L がそのままたまります。

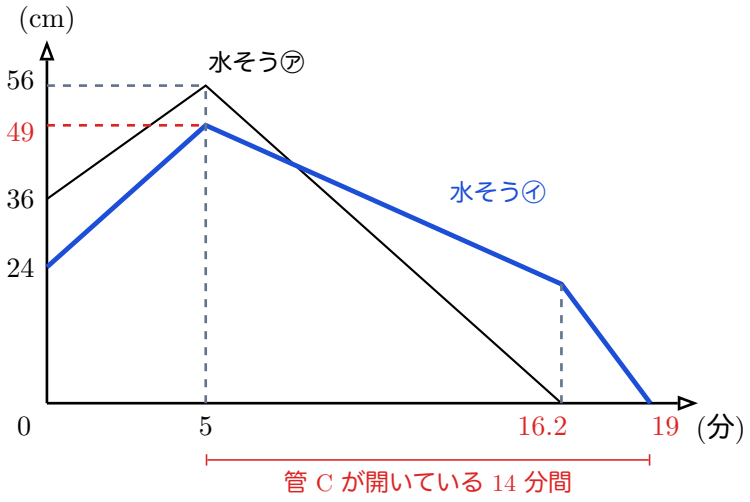
$$24 + 25 = 49(\text{L})$$

3. 5 分後からは蛇口 A が閉じるので、㋐ の 56 L は管 B から毎分 5 L ずつ出ていくだけです。㋐ が空になるのは

$$56 \div 5 = 11.2(\text{分}) \quad \rightarrow \quad 5 + 11.2 = 16.2(\text{分後})$$

4. ㋑ が空になるのは、その 2 分 48 秒後です。48 秒は $\frac{48}{60} = 0.8$ 分なので 2.8 分後。

$$16.2 + 2.8 = 19(\text{分後})$$



分かったことを書きこんだグラフ

5 管 C が開いているのは 5 分後から 19 分後までの $19-5=14$ 分間です。この間に管 C を通った水は、5 分後に イ にあった 49 L と、ㇷ から流れてきた 56 L の合計です。

$$(49+56)\div 14=105\div 14=7.5 \quad (\text{毎分 } 7.5\text{ L})$$

6 たしかめ:5 分後から 16.2 分後までの 11.2 分間、イ は毎分 5 L 入って 7.5 L 出るので、毎分 2.5 L ずつへります。$49-2.5\times 11.2=21$ L。残り 21 L が毎分 7.5 L で出ると $21\div 7.5=2.8$ 分 $=2$ 分 48 秒。問題文と合います。

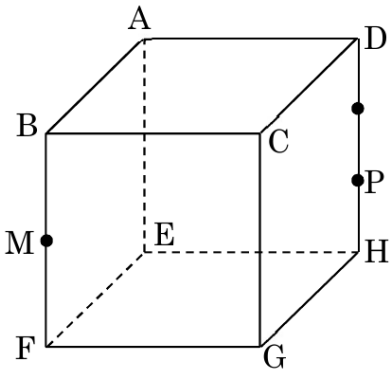
ポイント

水量グラフは「折れ目 = 何かが起きたとき」。区間ごとに(ふえた量)=(入った量)−(出た量)を式にする。最後は(1)と同じく「管 C を通った水の合計 ÷ C が開いていた時間」で求めると計算が少ない。

6 立体図形(立方体の切断)

問題

6 下の図のように，1 辺の長さが 12cm の立方体 ABCD - EFGH があります。辺 BF の真ん中の点を M，辺 DH を 3 等分する点のうち点 H に近い方を P とします。この立方体を 3 点 A，M，P を通る平面で切って 2 つに分け，その平面と辺 GH が交わる点を Q とします。また，2 つに分けた立体のうち，点 E をふくむ方の立体を立体㋐とします。このとき，次の各問いに答えなさい。



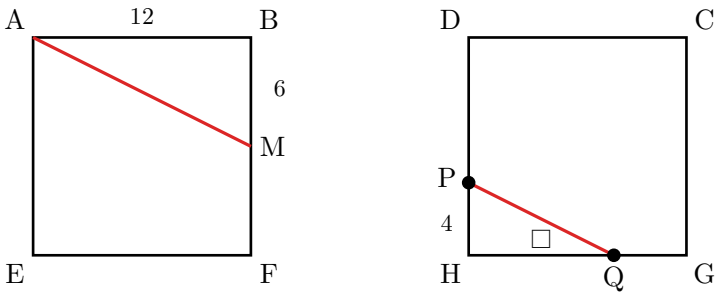
問題

(1) QH の長さは何 cm ですか。

(1) 切り口の線をかく

答え **8 cm**

1. 切断(せつだん)の基本は 2 つです。「①同じ面の上にある 2 点は直線で結ぶ」「②平行な面にできる切り口の線は平行になる」。
2. A と M は同じ面 ABFE の上にあるので、まっすぐ結びます。A と P も同じ面 AEHD の上にあるので結びます。
3. 面 ABFE と面 DCGH は向かい合った平行な面です。だから、面 DCGH にできる切り口の線は AM と平行で、P を通ります。この線が辺 GH と交わる点が Q です。



左:面 ABFE、右:面 DCGH(どちらも同じ向きから見た図)。AM と PQ は平行

4. AM は「横に 12 cm 進むと 6 cm 下がる」線です。つまり 横:たて $= 12 : 6 = 2 : 1$。PQ も同じかたむきです。P は H から 4 cm の高さ(DH $= 12$ cm を 3 等分した 1 つ分)なので、4 cm 下がる間に横に

$$QH = 4 \times 2 = 8(\text{cm})$$

進みます。(三角形 ABM と三角形 PHQ が相似で、相似比は $6:4=3:2$ です。)

ポイント

立方体の切断は「同じ面の 2 点を結ぶ」「平行な面には平行な線」。平行な線は「横にいくつ進むといくつ下がるか」のかたむきが同じ、と考えると長さが出る。

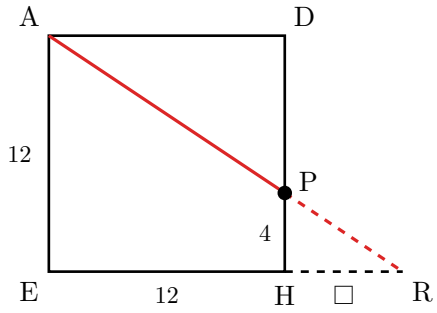
問題

(2) 直線 AP と直線 EH の交わる点を R とします。
このとき，三角すい P - HQR の体積は何 cm^3 ですか。

(2) 切り口をのばしてできる三角すい

答え $\boxed{32\ cm^3}$

1 面 AEHD を正面から見ます。AP をのばすと、EH をのばした線と R で交わります。



面 AEHD を正面から見た図

2 PH と AE は平行なので、三角形 RHP と三角形 REA は相似です。相似比は $PH:AE=4:12=1:3$ なので、$RH:RE=1:3$。RH を ① とすると RE は ③ で、差の ② が $EH=12$ cm にあたります。

$$RH=12\div 2=6(cm)$$

3 三角すい P-HQR は、底面を三角形 HQR、高さを PH と見ます。HQ と HR は立方体の辺の向きなので直角に交わっています。

底面積:$HQ\times HR\div 2=8\times 6\div 2=24\ cm^2$
体積:$24\times 4\div 3=32\ cm^3$

ポイント

切り口の線を立方体の外までのばすと、相似な三角形(ピラミッド形)ができる。底面が直角三角形で高さが辺にそっている三角すいは、「直角をはさむ 2 辺 × 高さ」で体積がすぐ出る。

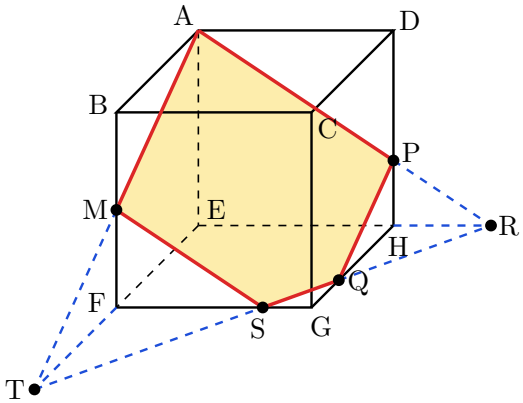
問題

(3) 立体㋐の体積は何 cm^3 ですか。

(3) 大きな三角すいから小さな三角すいを引く

答え **$724\ cm^3$**

1. 底面にできる切り口の線は Q を通り、辺 CG とは交わらず辺 FG と交わります。この点を S とすると(あとで FS = 9 cm と分かります)、切り口は五角形 A-M-S-Q-P です。このままでは体積が求めにくいので、切り口を外までのばして大きな三角すいを作ります。
2. 面 ABFE で、AM をのばして EF をのばした線と交わる点を T とします。MF = 6 cm は AE = 12 cm の半分で、MF と AE は平行なので、三角形 TFM と三角形 TEA は相似(相似比 1 : 2)です。だから TF = FE = 12 cm、TE = 24 cm です。



切り口をのばした図。A-ETR が大きな三角すい、色のついた五角形が切り口

3. T も R も S も Q も、「切った平面」と「底面をふくむ平面」の両方にのっている点なので、T・S・Q・R は 1 本の直線上にならびます。つまり、切った平面より下で E のある側は、三角すい A-ETR という 1 つの大きな三角すいになっています。

> 底面(直角三角形 ETR):ET = 24 cm、ER = 12 + 6 = 18 cm → $24 \times 18 \div 2 = 216\ cm^2$
> 高さ:AE = 12 cm
> 体積:$216 \times 12 \div 3 = 864\ cm^3$

4. 大きな三角すいのうち、立方体からはみ出している部分は 2 つの小さな三角すい、M-FTS(左手前)と P-HQR(右おく)です。どちらも大きな三角すいと相似(同じ形)です。

> P-HQR:(2)より $32\ cm^3$　(相似比 1 : 3 → 体積比 1 : 27。$864 \div 27 = 32$ でも合う)
> M-FTS:相似比は MF : AE = 1 : 2 → 体積比は $1 \times 1 \times 1 : 2 \times 2 \times 2 = 1 : 8$
> $864 \div 8 = 108\ cm^3$　(FS は ER の半分で $18 \div 2 = 9$ cm)

5. 立体 ㋐ は、大きな三角すいから 2 つの小さな三角すいを引いたものです。

$$864 - 108 - 32 = 724(cm^3)$$

ポイント

立方体をななめに切った立体の体積は、切り口を外までのばして「大きな三角すい − はみ出した小さな三角すい」で求める。相似比 a : b なら体積比は (a×a×a) : (b×b×b)。